INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a IX-a

1. Considerăm mulțimea $A=\left\{\frac{1}{2^i\cdot 3^j} / i\in\overline{1;100},\ \ j\in\overline{1;100}\right\}$.

a) Stabiliți dacă $\frac{1}{288}$ și $\frac{1}{2014}$ sunt sau nu elemente ale mulțimii A;

b) Arătați că pentru orice $a\in(0;1)$ și orice $n\in\mathbb{N}$, $\left(1+a+a^2+...+a^n\right)(1-a)<1$;

c) Arătați că suma elementelor mulțimii A este mai mică decât 3.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct în planul acestuia. Considerăm N simetricul lui M față de A, P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C.

a) Arătați că $\overrightarrow{NB}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{QD}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AD}$;

b) Arătați că D este mijlocul segmentului $[QM]$;

c) Demonstrați că dacă $MNPQ$ este paralelogram atunci $MA \parallel BD$ și $2MA=BD$.

3. Victor-Viorel are 14 monede de 50 bani, 5 bancnote de 5 lei și 3 bancnote de 10 lei. El vrea să-și cumpere o minge de baschet care costă 50 lei.

a) Dovediți că poate plăti mingea cu banii pe care-i are și fără să primească rest;

b) Determinați în câte moduri poate plăti mingea fără să primească rest.

4. O fabrică în care se produc roboți de bucătărie are capacitate maximă de producție de 100 bucăți pe zi. Costul total (exprimat în euro) pentru producerea intr-o zi a x roboți de bucătărie este dat de formula $c(x)=\frac{1}{10}x^2+20x+25$ iar prețul de vânzare pentru fiecare robot este de $\left(44-\frac{1}{5}x\right)$ euro.

a) Aflați costul total pentru producerea într-o zi a 20 de roboți de bucătărie;

b) Determinați câți roboți de bucătărie se pot produce într-o zi cu 2265 de euro;

c) Determinați câți roboți de bucătărie ar trebui produși într-o zi pentru ca profitul total să fie maxim. Aflați valoarea profitului maxim care se poate obține intr-o zi.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a X-a

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x$.

a) Arătați că f este strict crescătoare;

b) Rezolvați ecuația $2^x+x-6=0$;

c) Rezolvați inecuația $2^x\left(2^x+x-6\right)<2^x+x-6$.

2. Fie z un număr complex nereal, $z\neq\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ și $x=\dfrac{z^2+z+2}{z^2-z+2}$.

a) Arătați că $z^2-z+2\neq 0$;

b) Demonstrați că $x\neq 1$ și $\dfrac{x+1}{x-1}=z+\dfrac{2}{z}$;

c) Arătați că x este număr real dacă și numai dacă $|z|=\sqrt{2}$.

3. Într-un plan se duc n drepte distincte astfel încât oricare două nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente. Se notează cu a_n numărul de regiuni în care este împărțit planul de cele n drepte.

a) Determinați a_n pentru $n\in\{2;3;4\}$;

b) Demonstrați că $a_n-a_{n-1}=n$, oricare ar fi $n\geq 3$;

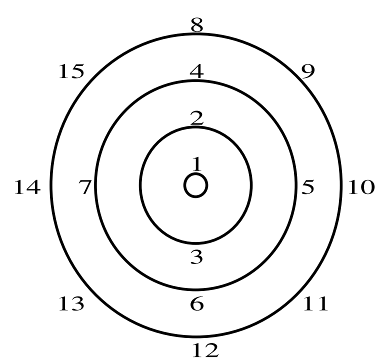
c) Arătați că $a_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n\geq 2$.

4. Se consideră numerele $1,2,3,...$ așezate ca în figura alăturată pe o schemă de joc de tip ”darts”, unde vom spune că numărul 1 se află pe cercul C_1, numerele 2 și 3 se află pe cercul C_2, numerele 4, 5, 6 și 7 se află pe cercul C_3, etc.

a) Determinați pe al câtelea cerc se află numărul 2014;

b) Arătați că suma S_n a numerelor de pe cercul C_n, $n\in\mathbb{N}^*$, este dată de formula $S_n=2^{n-2}\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)$;

c) Dacă o săgeată nimerește între două cercuri consecutive, C_n și C_{n+1}, definim scorul ei, $s(n)$, ca fiind diferența dintre suma numerelor de pe cercul mare și de patru ori suma numerelor de pe cercul mic. Să se determine între care cercuri a nimerit o săgeată care a înregistrat scorul 128.



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului
Clasa a XI-a

1. Fie n un număr natural fixat şi funcţia $f_n : [-1;1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^n}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x)$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$;

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = -\dfrac{1}{4}$;

c) Determinaţi pentru care valori $n \in \mathbb{N}$ există limita $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

2. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $A^3 = -8I_2$;

b) Dacă $B \in M_2(\mathbb{R})$ încât $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ şi $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, arătaţi că există $a \in \mathbb{R}$ încât $B = a \cdot I_2$;

c) Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ are loc $A^n \cdot X = X \cdot A^n$.
Arătaţi că n este multiplu de 3.

3. Pentru festivitatea de premiere a unui concurs de matematică s-au cumpărat din trei magazine A, B şi C, cărţi, caiete şi pixuri. Din magazinul A s-au cumpărat x cărţi, y caiete şi z pixuri, plătindu-se 99 lei, din magazinul B s-au cumpărat $(x+1)$ cărţi, $(y-2)$ caiete şi $(z+2)$ pixuri, plătindu-se 75 lei iar din magazinul C s-au cumpărat $(x-3)$ cărţi, $(y+2)$ caiete şi $(z-4)$ pixuri, plătindu-se 29 lei. Ştiind că în magazinul A o carte costă 10 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 4 lei, în magazinul B o carte costă 5 lei, un caiet costă 2 lei iar un pix costă 3 lei, respectiv în magazinul C o carte costă 4 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 2 lei, se cere:

a) Arătaţi că $\begin{cases} 10x + y + 4z = 99 \\ 5x + 2y + 3z = 68 \\ 4x + y + 2z = 47 \end{cases}$;

b) Determinaţi rangul matricei sistemului;

c) Aflaţi în câte moduri se pot face cumpărăturile.

4. O particulă se deplasează pe o traiectorie după legea de mişcare $s(t) = 120t - 40 \cdot e^{\frac{-t}{5}}$, unde t reprezintă momentul deplasării, măsurat în *secunde* şi $s(t)$ reprezintă pozitia particulei pe traiectorie la momentul t, măsurată în *metri* şi raportată la o origine O şi un sens ales ca pozitiv la deplasările pe acea traiectorie. Se cere:

a) Aflaţi distanţa faţă de origine a particulei la momentul $t = 0$;

b) Arătaţi că există un moment t_0 al deplasării în care particula ajunge în originea O;

c) Calculaţi viteza $v(0)$ a particulei la momentul $t = 0$, unde $v(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{s(t)-s(0)}{t}$;

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a XII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și polinomul $f_n = (n-1)X^n - nX^{n-1} + 1$.

a) Arătați că f_n se divide cu $g = (X-1)^2$;

b) Determinați rădăcinile polinomului f_n în cazurile $n = 2$ și $n = 3$;

c) Pentru $n \geq 4$, dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f_n, arătați:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

și

f_n nu are toate rădăcinile reale. (ii)

2. Fie $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ integrabilă și monoton crescătoare.

a) Arătați că $x f(x) + y f(y) \geq x f(y) + y f(x)$, oricare ar fi $x, y \in [0;1]$;

b) Integrând inegalitatea de mai sus în raport cu x, arătați că:
$\int_0^1 x f(x) dx + y f(y) \geq \frac{1}{2} f(y) + y \int_0^1 f(x) dx$, oricare ar fi $y \in [0;1]$;

c) Demonstrați că $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$;

d) Arătați că $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \geq \frac{1}{4}(e-1)$.

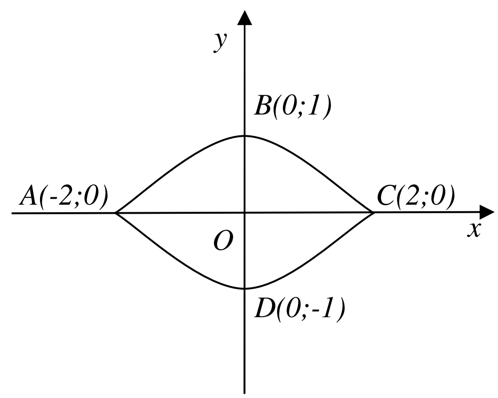
3. În familia Popescu domnește *regula armoniei perfecte*, aceasta în sensul că, în timpul oricărei discuții purtată spre a întreprinde ceva, se știe dinainte cine are ideea cea mai bună. Astfel, fiul, Florin (F), știe că în orice discuție (chiar și cu el însuși!) cea mai bună idee este cea care vine de la interlocutorul său. Părinții, tatăl (T) și mama (M) când discută între ei constată că cea mai bună idee este cea sugerată de Florin iar când discută fiecare cu sine însuși constată că cea mai bună idee este cea sugerată de celălalt părinte.

a) Compuneți tabla de operații a mulțimii $Familia\ Popescu = \{T; M; F\}$, cu legea de compoziție
$x * y = z \Leftrightarrow$ (din discuția lui x cu y cea mai bună idee este cea sugerată de z);

b) Arătați că mulțimea $Familia\ Popescu = \{T; M; F\}$ cu operația "$*$" se structurează ca grup comutativ, izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_3; +)$ al claselor de resturi *modulo* 3.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

4. O piesă a unui angrenaj este de formă plată lenticulară, cu dimensiunile $AC = 4cm$ şi $BD = 2cm$ iar $\overset{\frown}{ABC}$, respectiv $\overset{\frown}{ADC}$ sunt arce de parabolă de ecuaţii $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, respectiv $y = \frac{x^2}{4} - 1$, cu $x \in [-2; 2]$, ele fiind reprezentate grafic în figura alăturată. Piesa este realizată în serie, în mod automat, de către o componentă A a unui utilaj, prin decupare din folii dreptunghiulare de material plastic cu dimensiunile de $80cm$ şi $60cm$, astfel încât fiecare două piese vecine să aibă comun doar unul din punctele de tipul A, B, C, D din figură şi la decupare să se obţină cea mai mică pierdere de material.



Totodată, în momentul în care resturile de material rămas prin decupare cumulează masa unei folii, ele sunt preluate automat de o componentă B a utilajului, componentă care are rolul de a turna foliile de material plastic necesare decupării şi a le transmite componentei A.

Se cere:

a) Determinaţi numărul de piese decupate din fiecare folie de componenta A a utilajului.

b) Dacă o piesă cântăreşte 10 grame, calculaţi masa pierderii de material în situaţia în care utilajul este reglat să se oprească automat după consumarea a 2014 folii.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a IX-a

BAREM

1. Considerăm mulțimea $A=\left\{\frac{1}{2^i\cdot 3^j} / i\in\overline{1;100},\ \ j\in\overline{1;100}\right\}$.

a) Stabiliți dacă $\frac{1}{288}$ și $\frac{1}{2014}$ sunt sau nu elemente ale mulțimii A;

b) Arătați că pentru orice $a\in(0;1)$ și orice $n\in\mathbb{N}$, $\left(1+a+a^2+...+a^n\right)(1-a)<1$;

c) Arătați că suma elementelor mulțimii A este mai mică decât 3.

BAREM:

a) $\frac{1}{288}=\frac{1}{2^5\cdot 3^2}\in A$ și $\frac{1}{2014}\notin A$ **2p**

b) $a\in(0;1)\ \Rightarrow\ \left(1+a+a^2+...+a^n\right)(1-a)=1-a^{n+1}<1$ **2p**

c) $\sum\limits_{i,j=0}^{100}\frac{1}{2^i\cdot 3^j}=\left(\sum\limits_{i=0}^{100}\frac{1}{2^i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{j=0}^{100}\frac{1}{3^j}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$ **3p**

2. Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct în planul acestuia. Considerăm N simetricul lui M față de A, P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C.

a) Arătați că $\overrightarrow{NB}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{QD}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AD}$;

b) Arătați că D este mijlocul segmentului $[QM]$;

c) Demonstrați că dacă $MNPQ$ este paralelogram atunci $MA\parallel BD$ și $2MA=BD$.

BAREM:

a) $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ **1p**

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ **1p**

$\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AD}$ **1p**

b) $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{MA}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{QD}\ \Rightarrow\ D$ este mijlocul segmentului $[QM]$ **2p**

c) $MNPQ$ paralelogram $\Rightarrow\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ **1p**

$2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{DB}\ \Rightarrow\ MA\parallel DB$ și $2\cdot MA=DB$ **1p**

3. Victor-Viorel are 14 monede de 50 bani, 5 bancnote de 5 lei şi 3 bancnote de 10 lei. El vrea să-şi cumpere o minge de baschet care costă 50 lei.

a) Dovediți că poate plăti mingea cu banii pe care-i are şi fără să primească rest;

b) Determinați în câte moduri poate plăti mingea fără să primească rest.

BAREM:

a) Conform cu enunțul $\frac{1}{2}x+5y+10z=50,\ x\le 14, y\le 5,\ z\le 3$, ... **1p**

deci $x+10y+20z=100,\ x\le 14, y\le 5,\ z\le 3$ **1p**

$\Rightarrow\ x \vdots 10$ şi având $x\le 14\ \Rightarrow\ x\in\{0;10\}$ **1p**

$x=0\ \Rightarrow\ y=4,\ z=3$ **1p**

$x=10\ \Rightarrow\ y=5,\ z=2$ sau $y=z=3$ **1p**

b) Deci sunt posibile trei moduri de plată: $(x;\ y;\ z)\in\{(0;4;3),(10;5;2),(10;3;3)\}$ **2p**

4. O fabrică în care se produc roboți de bucătărie are capacitate maximă de producție de 100 bucăți pe zi. Costul total (exprimat în euro) pentru producerea intr-o zi a x roboți de bucătărie este dat de formula $c(x)=\frac{1}{10}x^2+20x+25$ iar prețul de vânzare pentru fiecare robot este de $\left(44-\frac{1}{5}x\right)$ euro.

a) Aflați costul total pentru producerea într-o zi a 20 de roboți de bucătărie;

b) Determinați câți roboți de bucătărie se pot produce într-o zi cu 2265 de euro;

c) Determinați câți roboți de bucătărie ar trebui produşi într-o zi pentru ca profitul total să fie maxim. Aflați valoarea profitului maxim care se poate obține intr-o zi.

BAREM:

a) $c(20)=465$ (*euro*) **2p**

b) $c(x)=2265$ **1p**

$x=80$ (*roboți*) **1p**

c) profitul obținut în urma vânzării a x roboți este

$p(x)=x\left(44-\frac{1}{5}x\right)-\left(\frac{1}{10}x^2+20x+25\right)=-\frac{3}{10}x^2+24x-25$ **1p**

şi $p(x)$ are punct de maxim $x=40$ **1p**

deci profitul maxim este $p(40)=455$ (*euro*) **1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a X-a

BAREM

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x$.

a) Arătați că f este strict crescătoare;

b) Rezolvați ecuația $2^x+x-6=0$;

c) Rezolvați inecuația $2^x\left(2^x+x-6\right)<2^x+x-6$.

BAREM:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=2^x+x$ este sumă de funcții strict crescătoare **2p**

b) din a) $\Rightarrow f$-injectivă $\Rightarrow$ $f(x)=6$ are soluție unică $x=2$ **2p**

c) $\left(2^x+x-6\right)\left(2^x-1\right)<0$ **1p**

$\Rightarrow$ $x\in(0;\,2)$ **2p**

2. Fie z un număr complex nereal, $z\neq\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, $i^2=-1$, și $x=\dfrac{z^2+z+2}{z^2-z+2}$.

a) Arătați că $z^2-z+2\neq 0$;

b) Demonstrați că $x\neq 1$ și $\dfrac{x+1}{x-1}=z+\dfrac{2}{z}$;

c) Arătați că x este număr real dacă și numai dacă $|z|=\sqrt{2}$.

BAREM:

a) $z^2-z+2=0$ $\Rightarrow$ $z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, contrazice $z\neq\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, deci $z^2-z+2\neq 0$ **1p**

b) $x=1$ $\Rightarrow$ $z=0$, contrazice $z\notin\mathbb{R}$ **1p**

Verifică $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{z^2+2}{z}=z+\dfrac{2}{z}$ **1p**

c) $z=a+b\cdot i$, $|z|=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x+1}{x-1}=a+b\cdot i+\dfrac{2(a-b\cdot i)}{a^2+b^2}=2a\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{R}$ **2p**

$z=a+b\cdot i$, $z+\dfrac{2}{z}=a+b\cdot i+\dfrac{2(a-b\cdot i)}{a^2+b^2}\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $b-\dfrac{2b}{a^2+b^2}=0$ **1p**

$\Rightarrow$ sau $b=0$, contradicție cu $z\notin\mathbb{R}$, sau $a^2+b^2=2$ $\Rightarrow$ $|z|=\sqrt{2}$ **1p**

Observație: Cum $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, rezolvarea c) poate folosi și proprietățile conjugatului:

Dacă $|z|=\sqrt{2} \Rightarrow \bar{z}=\dfrac{2}{z} \Rightarrow z+\bar{z}=z+\dfrac{2}{z} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=z+\bar{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{z+\bar{z}+1}{z+\bar{z}-1} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$, deoarece $\bar{x}=\overline{\left(\dfrac{z+\bar{z}+1}{z+\bar{z}-1}\right)}=\dfrac{\bar{z}+z+1}{\bar{z}+z-1}=x$.

Reciproc, dacă $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=z+\dfrac{2}{z}\in\mathbb{R} \Rightarrow z+\dfrac{2}{z}=m\in\mathbb{R} \Rightarrow z^2-m\cdot z+2=0 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=2 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$

3. Într-un plan se duc n drepte distincte astfel încât oricare două nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente. Se notează cu a_n numărul de regiuni în care este împărțit planul de cele n drepte.

a) Determinați a_n pentru $n\in\{2;3;4\}$;

b) Demonstrați că $a_n-a_{n-1}=n$, oricare ar fi $n\geq 3$;

c) Arătați că $a_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n\geq 2$.

<u>BAREM:</u>

a) Determină $a_2=4$, $a_3=7$, $a_4=11$ **3p**

b) Demonstrează, $a_n=a_{n-1}+n$, $(\forall)$ $n\geq 3$, observând că *atunci când avem $a_n\in\mathbb{N}$ regiuni, corespunzătoare la $n\in\mathbb{N}$ drepte orientate diferit fiecare două, va exista o dreaptă care conține, în unul din cele două semiplane închise determinate de ea, toate intersecțiile $d_i\bigcap_{i<j} d_j$ a celor $n\in\mathbb{N}$ drepte* și atunci în acel semiplan avem a_{n-1} regiuni iar în celălalt semiplan exact n regiuni din totalul de a_n regiuni, deci $a_n-a_{n-1}=n$ **2p**

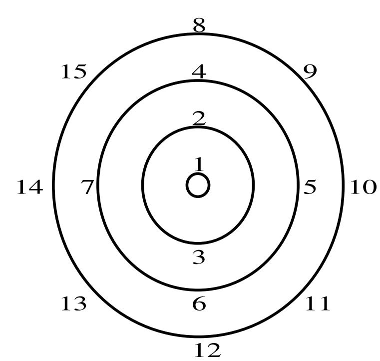
c) Calculează $a_n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ **2p**

4. Se consideră numerele $1,2,3,...$ așezate ca în figura alăturată pe o schemă de joc de tip ”darts”, unde vom spune că numărul 1 se află pe cercul C_1, numerele 2 și 3 se află pe cercul C_2, numerele 4, 5, 6 și 7 se află pe cercul C_3, etc.

a) Determinați pe al câtelea cerc se află numărul 2014;

b) Arătați că suma S_n a numerelor de pe cercul C_n, $n\in\mathbb{N}^*$, este dată de formula $S_n=2^{n-2}\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)$;

c) Dacă o săgeată nimerește între două cercuri consecutive, definim scorul ei ca fiind diferența dintre suma numerelor de pe cercul mare și de patru ori suma numerelor de pe cercul mic. Să se



<u>BAREM:</u>

a) Notând $C_1, C_2, C_3, ...$ cercurile din figură, se observă că pentru orice $n\geq 1$ pe cercul C_n primul număr este 2^{n-1} și ultimul este $\left(2^n-1\right)$ **2p**

Cum $2^{10}=1024\le 2014\le 2047=2^{11}-1 \Rightarrow$ 2014 este pe cercul C_{11} **1p**

b) $S_n=2^{n-1}+\left(2^{n-1}+1\right)+\left(2^{n-1}+2\right)+\ldots+\left(2^n-1\right)$ **2p**

$\Rightarrow S_n=\dfrac{\left(2^n-2^{n-1}\right)\cdot\left(2^{n-1}+2^n-1\right)}{2}=2^{n-2}\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)$

c) Dacă săgeata nimerește între cercurile C_n și C_{n+1} scorul este

$s_n=S_{n+1}-4S_n=2^{n-1}\cdot\left(3\cdot 2^n-1\right)-2^n\cdot\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)=3\cdot 2^{2n-1}-2^{n-1}-3\cdot 2^{2n-1}+2^n=2^{n-1}$ **1p**

și cum $128=2^7=S_9-4S_8 \Rightarrow$ săgeata a nimerit între cercurile C_8 și C_9 .... **1p**

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a XI-a

BAREM

1. Fie n un număr natural fixat și funcția $f_n : [-1;1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^n}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x)$ și $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$;

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = -\dfrac{1}{4}$;

c) Determinați pentru care valori $n\in\mathbb{N}$ există limita $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

BAREM:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right) = 0$ **1p**

$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(\sqrt{1-x}-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}+\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}+1}\right] =$ **1p**

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\right] = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right] =$ **2p**

$= \ldots = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left[\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right]} = -\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n} = +\infty$ dacă $n\in\mathbb{N}$ este par și nu există dacă este impar **1p**

Pentru $n\geq 3$ și impar, nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ **1p**

În concluzie, există $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ pentru $n=1$ și pentru $n\in\mathbb{N}$ număr par **1p**

2. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^3=-8I_2$;

b) Dacă $B\in M_2(\mathbb{R})$ încât $B\cdot E_1=E_1\cdot B$ și $B\cdot E_2=E_2\cdot B$, arătați că există $a\in\mathbb{R}$ încât $B=a\cdot I_2$;

c) Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$ are loc $A^n\cdot X=X\cdot A^n$.
Arătați că n este multiplu de 3.

BAREM:

a) Arată $A^3=-8I_2$ **2p**

b) $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B\cdot E_1=E_1\cdot B \Rightarrow c=0,\ a=d$ **1p**

$B\cdot E_2=E_2\cdot B \Rightarrow b=0,\ a=d$ **1p**

$B=a\cdot I_2$ **1p**

c) $A^n\cdot E_1=E_1\cdot A^n,\ A^n\cdot E_2=E_2\cdot A^n \Rightarrow A^n=a\cdot I_2$ **1p**

și conform cu a), $n=3k$ **1p**

Observație:

$$A=2\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ și considerând } M(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow M(\alpha)\cdot M(\beta)=M(\alpha+\beta),$$

$$\text{deci } A^n=2^n\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & \sin\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{3k}=(-2)^{3k}\cdot I_2$$

Totodată, dacă $A^n\cdot X=X\cdot A^n$, $(\forall)\ X\in M_2(\mathbb{R})$ atunci $A^n=a\cdot I_2$, $a\in\mathbb{R}$, etc.

3. Pentru festivitatea de premiere a unui concurs de matematică s-au cumpărat din trei magazine A, B și C, cărți, caiete și pixuri. Din magazinul A s-au cumpărat x cărți, y caiete și z pixuri, plătindu-se 99 lei, din magazinul B s-au cumpărat $(x+1)$ cărți, $(y-2)$ caiete și $(z+2)$ pixuri, plătindu-se 75 lei iar din magazinul C s-au cumpărat $(x-3)$ cărți, $(y+2)$ caiete și $(z-4)$ pixuri, plătindu-se 29 lei. Știind că în magazinul A o carte costă 10 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 4 lei, în magazinul B o carte costă 5 lei, un caiet costă 2 lei iar un pix costă 3 lei, respectiv în magazinul C o carte costă 4 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 2 lei, se cere:

a) Arătați că $\begin{cases} 10x + y + 4z = 99 \\ 5x + 2y + 3z = 68 \\ 4x + y + 2z = 47 \end{cases}$;

b) Determinați rangul matricei sistemului;

c) Aflați în câte moduri se pot face cumpărăturile.

BAREM:

a) Justifică ecuațiile sistemului **2p**

b) $rang\ A = 2$ **2p**

c) Familia de soluții ale sistemului este $(x; y; z) = (\alpha; 2\alpha - 5; 26 - 3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **1p**

și cum $x, y, z \in \mathbb{N}$ și $x \geq 3$, $y \geq 2$, $z \geq 4$ **1p**

se obține $\alpha \in \{4; 5; 6; 7\}$, deci sunt 4 moduri posibile de a face cumpărăturile **1p**

4. O particulă se deplasează pe o traiectorie după legea de mișcare $s(t) = 120t - 40 \cdot e^{\frac{-t}{5}}$, unde t reprezintă momentul deplasării, măsurat în *secunde* și $s(t)$ reprezintă pozitia particulei pe traiectorie la momentul t, măsurată în *metri* și raportată la o origine O și un sens ales ca pozitiv la deplasările pe acea traiectorie. Se cere:

a) Aflați distanța față de origine a particulei la momentul $t = 0$;

b) Arătați că există un moment t_0 al deplasării în care particula ajunge în originea O;

c) Calculați viteza $v(0)$ a particulei la momentul $t = 0$, unde $v(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{s(t) - s(0)}{t}$;

BAREM:

a) $s(0) = -40$ **2p**

deci la momentul $t = 0$ particula este la distanța de $40m$ de origine **1p**

b) Cum $s : [0; \infty) \to \mathbb{R}$, $s(t) = 120t - 40 \cdot e^{\frac{-t}{5}}$ este continuă pe domeniul ei și $s(0) \cdot s(1) < 0$ **1p**

există $t_0 \in (0; 1)$ în care $s(t_0) = 0$ **1p**

c) $v(t_0) = s'(t_0) = 120 + 8 \cdot e^{\frac{-t_0}{5}}$ **1p**

deci $v(0) = 128\ m/s$ **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

Clasa a XII-a

BAREM

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și polinomul $f_n = (n-1)X^n - nX^{n-1} + 1$.

a) Arătați că f_n se divide cu $g = (X-1)^2$;

b) Determinați rădăcinile polinomului f_n în cazurile $n = 2$ și $n = 3$;

c) Pentru $n \geq 4$, dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f_n, arătați:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

și

f_n nu are toate rădăcinile reale. (ii)

<u>BAREM:</u>

a) $f_n(1) = 0$, $f_n'(1) = 0$ **2p**

b) $n = 2 \Rightarrow f_2 = X^2 - 2X + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ **1p**

$n = 3 \Rightarrow f_3 = 2X^3 - 3X^2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{2}$ **1p**

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{1}{x_i \cdot x_j} \right)$ **1p**

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 0$, $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{1}{x_i \cdot x_j} = 0$ **1p**

$f_n(0) \neq 0$ și dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} > 0$, contradicție, deci nu pot fi toate rădăcinile reale **1p**

2. Fie $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ integrabilă și monoton crescătoare.

a) Arătați că $x f(x) + y f(y) \geq x f(y) + y f(x)$, oricare ar fi $x, y \in [0;1]$;

b) Integrând inegalitatea de mai sus în raport cu x, arătați că:

$\int_0^1 x f(x) dx + y f(y) \geq \frac{1}{2} f(y) + y \int_0^1 f(x) dx$, oricare ar fi $y \in [0;1]$;

c) Demonstrați că $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$;

d) Arătați că $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \geq \frac{1}{4}(e-1)$.

<u>BAREM:</u>

a) f monoton crescătoare $\Rightarrow \left(f(x)-f(y)\right)(x-y)\geq 0$, etc. **2p**

b) Calcul direct **2p**

c) Calcul direct **1p**

d) $f(x)=x\cdot e^{x^2}$ și aplică c), etc. **2p**

3. În familia Popescu domnește *regula armoniei perfecte*, aceasta în sensul că, în timpul oricărei discuții purtată spre a întreprinde ceva, se știe dinainte cine are ideea cea mai bună. Astfel, fiul, Florin (F), știe că în orice discuție (chiar și cu el însuși!) cea mai bună idee este cea care vine de la interlocutorul său. Părinții, tatăl (T) și mama (M) când discută între ei constată că cea mai bună idee este cea sugerată de Florin iar când discută fiecare cu sine însuși constată că cea mai bună idee este cea sugerată de celălalt părinte.

a) Compuneți tabla de operații a mulțimii $Familia\ Popescu=\{T;M;F\}$, cu legea de compoziție $x*y=z \Leftrightarrow$ (din discuția lui x cu y cea mai bună idee este cea sugerată de z);

b) Arătați că mulțimea $Familia\ Popescu=\{T;M;F\}$ cu operația "$*$" se structurează ca grup comutativ, izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_3;+)$ al claselor de resturi *modulo* 3.

<u>BAREM:</u>

a) Tabla operației **2p**

b) Justifică F element neutru **1p**

Justifică proprietatea de comutativitate **1p**

Justifică proprietatea de asociativitate **1p**

Justifică proprietatea de simetrizabilitate **1p**

Determină izomorfismul **1p**

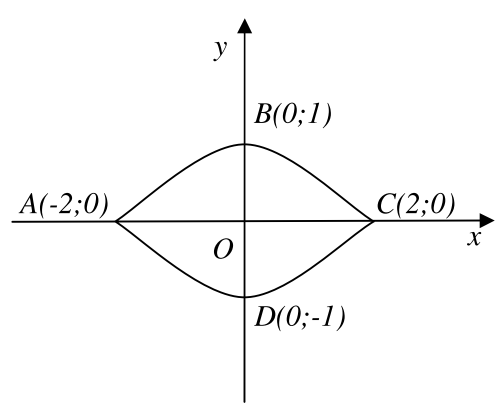
4. O piesă a unui angrenaj este de formă plată lenticulară, cu dimensiunile $AC=4\,cm$ și $BD=2\,cm$ iar $\overset{\frown}{ABC}$, respectiv $\overset{\frown}{ADC}$ sunt arce de parabolă de ecuații $y=1-\frac{x^2}{4}$, respectiv $y=\frac{x^2}{4}-1$, cu $x\in[-2;2]$, ele fiind reprezentate grafic în figura alăturată. Piesa este realizată în serie, în mod automat, de către o componentă A a unui utilaj, prin decupare din folii dreptunghiulare de material plastic cu dimensiunile de $80\,cm$ și $60\,cm$, astfel încât fiecare două piese vecine să aibă comun doar unul din punctele de tipul A, B, C, D din figură și la decupare să se obțină cea mai mică pierdere de material.

Totodată, în momentul în care resturile de material rămas prin decupare cumulează masa unei folii, ele sunt preluate automat de o componentă B a utilajului, componentă care are rolul de a turna foliile de material plastic necesare decupării și a le transmite componentei A.

Se cere:

a) Determinați numărul de piese decupate din fiecare folie de componenta A a utilajului.

b) Dacă o piesă cântărește 10 grame, calculați masa pierderii de material în situația în care utilajul este reglat să se oprească automat după consumarea a 2014 folii.



BAREM:

a) Lungimea piesei fiind $AC = 4cm$ și lățimea $BD = 2cm$ numărul maxim de piese care se pot decupa dintr-o folie este $20 \times 30 = 600$ piese **2p**

b) Cum $\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = x - \frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$ **2p**

înseamnă că aria ocupată de o piesă este $\frac{16}{3} cm^2$ **1p**

Deci la fiecare piesă pierderea de material prin decupare este de $8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} cm^2$ și astfel la fiecare folie pierderea de material reprezintă $1/3$ din suprafața foliei **1p**
Astfel, la primele 4 folii, a patra este realizată prin reciclarea materialului, la fel în continuare la fiecare următoarele 4 folii și cum restul împărțirii $2014 : 4$ este $r = 2$, înseamnă că pierderea de material reprezintă doar $\frac{2}{3}$ din suprafața unei folii, aceasta însemnnând chiar masa a 600 de piese, ceea ce înseamnă că pierderea de material este doar de $6kg$ **1p**