

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX-A

- a) Demonstrați că: $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = 5x - 4$.

c) Dacă n și k sunt numere naturale astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$ demonstrați că:
$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = n$$
- Fie ΔABC și $A' \in (BC)$. Dreapta AA' intersectează a doua oară cercul circumscris ΔABC în D .

a) Demonstrați că $AA' \cdot A'D = A'B \cdot A'C$;

b) Dacă centrul de greutate $G \in AA'$ demonstrați că: $9AG \cdot GD = AB^2 + BC^2 + CA^2$;
- La finala concursului de matematică aplicată "Adolf Haimovici", profilul științe s-au calificat 50 elevi din clasa ^a IX ^a. După corectarea lucrărilor, 19 dintre ei au obținut punctajul maxim. S-au procedat, obișnuit la o probă de baraj pentru a desemna câștigătorul. Dar, și la această probă toți cei 19 elevi au obținut punctajul maxim. Împreună cu ei am convenit următoarea regulă pentru desemnarea câștigătorului:
Elevii se așează în cerc și sunt numerotați cu 1, 2, 3, ..., 19.
Apoi, începând cu cel de pe poziția 2, fiecare al doilea concurent este eliminat, până când rămâne câștigătorul.

a) Pe ce poziție se află câștigătorul ?

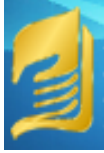
b) Dar dacă ar fi rămas doar 16 elevi care ar fi participat la desemnarea câștigătorului, care ar fi fost poziția acestuia ?
- Se consideră funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ astfel încât

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}, (\forall) n \in \mathbb{N} \text{ și } f(2014) = \frac{2014}{2015}.$$

a) Să se demonstreze că $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

b) Determinați funcția f .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

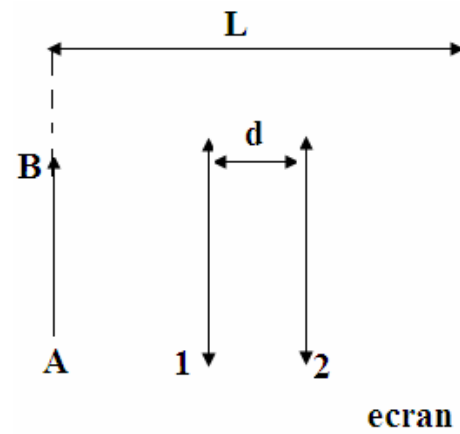
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul real $x = \sqrt[5]{100}$.
 - a) Determinați partea întreagă a numărului x .
 - b) Stabiliți care este numărul întreg cel mai apropiat de x .
 - c) Demonstrați că există o infinitate de numere reale pozitive $a, a \neq 1$ pentru care $\log_a x$ este număr rațional.
2. Spunem că un număr complex z este de tip I dacă $|z^2 + 1| \leq 1$ și este de tip II dacă $|z + 1| \leq 1$.
 - a) Dați un exemplu de număr complex de tip I care are modulul mai mare decât 1.
 - b) Demonstrați că o infinitate de numere complexe de tip II au modulul mai mare decât 1.
 - c) Demonstrați că, dacă un număr complex este atât de tip I cât și de tip II, atunci modulul său este cel mult egal cu 1.

3. Măsurarea distanței focale a unei lentile convergente se poate face prin metoda Bessel, care presupune așezarea lentilei între un obiect luminos AB și un ecran, considerate fixe, aflate la distanța L unul față de celălalt. Se constată că există două poziții ale lentilei (1 și 2) pentru care se obțin imagini clare ale obiectului luminos pe ecran, iar cele două poziții sunt situate la distanța d una față de cealaltă.

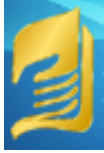
Aflați distanța focală f a lentilei, funcție de L și d . Se consideră cunoscută formula lentilelor $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$,

unde p este distanța de la obiect la lentilă, iar p' este distanța de la lentilă la imaginea obiectului (pe ecran).



4. Comisia centrală a concursului național de matematică "Adolf Haimovici" este formată din cinci membri. Documentele la care lucrează comisia sunt păstrate într-un seif metalic, încuiat cu lacăte diferite. Fiecare dintre membrii comisiei are cheile unor dintre lacăte, astfel încât seiful să poată fi deschis atunci când se întâlnesc cel puțin trei membri ai comisiei și să nu poată fi deschis de doi sau mai puțini membri.
 - a) Care este numărul minim de lacăte ale seifului ?
 - b) Câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei ?
 - c) Care este modul de împărțire a cheilor către membrii comisiei ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



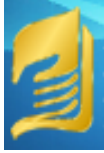
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI-A

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $TrA = a + d$, $\det A = ad - bc$.
 - a) Să se demonstreze că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Dacă $\det(A - I_2) = 2$ și $\det(A + I_2) = 4$, calculați $\det A$ și $\det(A - 2I_2)$.
 - c) Dacă $A^{2014} = O_2$, demonstrați că $A^2 = O_2$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$. Să se calculeze:
 - a) Limitele laterale în punctul $x_0 = 0$.
 - b) Limitele laterale în punctul $x_0 = -1$.
 - c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie și coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt $\frac{1}{2}$.
 - a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?
 - b) Care este determinantul de valoare minimă ?
4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă iar ceilalți cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii își schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu își schimbă culoarea. Demonstrați că:
 - a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.
 - b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde. (Observați că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ și $\forall k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$
.
b) Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a - b$.
c) Argumentați că nu există $g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
 $g(2013) = 2014; g(2014) = 2015; g(2015) = 2013$.
d) Există un polinom $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013) = 2013, h(2014) = 2014$ și $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 și 2014?

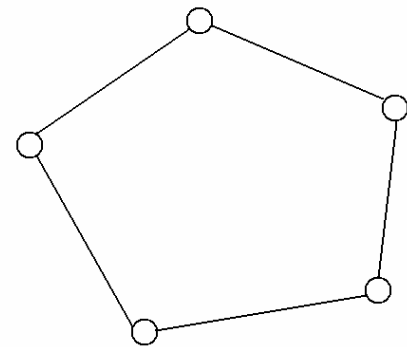
2. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$ și $g(x) = e^{-x^2}$.

- a) Calculați $f'(0); f''(0); f'''(0); f^{(4)}(0)$.
- b) Demonstrați că $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) < 0, \forall x < 0$.
- c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul $(0,74; 0,75)$.

3. Avem la dispoziție două culori roșu și albastru. Notăm cu \mathcal{F} mulțimea tuturor colorărilor posibile (roșu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{F}$ și $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{F}$ astfel:

- i) dacă vârfurile corespunzătoare lui \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt de culori diferite, atunci în \mathcal{C}_3 vârful va fi colorat cu roșu;
- ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt de aceeași culoare, atunci în \mathcal{C}_3 vârful va fi colorat cu albastru;

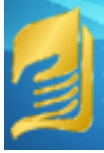
- a) Aflați cardinalul mulțimii \mathcal{F} ;
- b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe \mathcal{F} .



4. Admitem cunoscut rezultatul:

Dacă \mathcal{P} este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, unde $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii \mathcal{P} este punctul $G(x_G, y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}; \quad y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene \mathcal{P} definită prin $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$, $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil real, specializarea științele naturii



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. a) Demonstrați că: $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = 5x-4.$

c) Dacă n și k sunt numere naturale astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$ demonstrați că:

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = n.$$

Soluție.

a) Dacă $n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = \left[x + \frac{1}{2} \right] = n$ și $[2x] = 2n$ 1p

Dacă $n + \frac{1}{2} \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n, \left[x + \frac{1}{2} \right] = n+1$ și $[2x] = 2n+1$ 1p

b) Notăm $\frac{2x-1}{3} = y \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$ 1p

Ecuația devine $[y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = \frac{15y-3}{2} \Rightarrow [2y] = \frac{15y-3}{2} = m \in \mathbb{Z}$ 1p

$y = \frac{2m+3}{15}; -\frac{9}{11} < m \leq \frac{6}{11} \Rightarrow m=0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$ și $x = \frac{4}{5}$ 1p

c) $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]$ 1p

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] = [n] - \left[\frac{n}{2} \right]$$

$$\left[\frac{n+2}{2^2} \right] = \left[\frac{n}{2^2} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{2^2} \right]$$

...

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2^k} \right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right]$$

$S = [n] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] = n$ 1p

2. Fie ΔABC și $A' \in (BC)$. Dreapta AA' intersectează a doua oară cercul circumscris ΔABC în D .

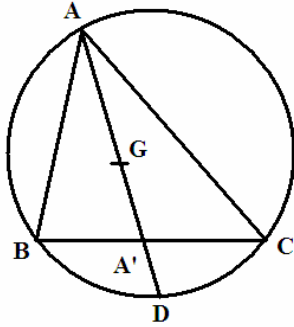
a) Demonstrați că $AA' \cdot A'D = A'B \cdot A'C$;

b) Dacă centrul de greutate $G \in AA'$ demonstrați că: $9AG \cdot GD = AB^2 + BC^2 + CA^2$;

Soluție.

a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD \Rightarrow \Delta ABA' \sim \Delta CDA' \Rightarrow AA' \cdot A'D = A'B \cdot A'C$ 2p

b)



$$G \in AA' \Rightarrow BA' = A'C = \frac{BC}{2} \Rightarrow A'D = \frac{BC^2}{4 \cdot AA'} \dots\dots\dots 1p$$

$$GD = GA' + A'D = \frac{AA'}{3} + \frac{BC^2}{4 \cdot AA'} = \frac{4A'A^2 + 3BC^2}{12 \cdot AA'} \dots\dots\dots 2p$$

$$9AG \cdot GD = 9 \cdot \frac{2}{3} AA' \cdot \frac{4 \cdot A'A^2 + 3BC^2}{12 \cdot AA'} = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2 + 3BC^2}{2} = AB^2 + AC^2 + BC^2 \dots\dots\dots 2p$$

3. La finala concursului de matematică aplicată "Adolf Haimovici", profilul științe s-au calificat 50 elevi din clasa ^a IX ^a. După corectarea lucrărilor, 19 dintre ei au obținut punctajul maxim. S-au procedat, obișnuit la o probă de baraj pentru a desemna câștigătorul. Dar, și la această probă toți cei 19 elevi au obținut punctajul maxim. Împreună cu ei am convenit următoarea regulă pentru desemnarea câștigătorului:

Elevii se așează în cerc și sunt numerotați cu 1, 2, 3, ..., 19.

Apoi, începând cu cel de pe poziția 2, fiecare al doilea concurent este eliminat, până când rămâne câștigătorul.

a) Pe ce poziție se află câștigătorul ?

b) Dar dacă ar fi rămas doar 16 elevi care ar fi participat la desemnarea câștigătorului, care ar fi fost poziția acestuia ?

Soluție.

a) Fie $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}, E_{17}, E_{18}, E_{19}$ cei 19 elevi.

În prima etapă sunt eliminați: $E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12}, E_{14}, E_{16}$ și E_{18} 1p

Urmează: $E_1, E_5, E_9, E_{13}, E_{17}$ 1p

Apoi: E_3, E_{11}, E_{19} 1p

În ultima etapă este eliminat E_{15} și câștigătorul este E_7 1p

b) Fie $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}$ cei 16 elevi.

În prima etapă sunt eliminați: $E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12}, E_{14}, E_{16}$.

Apoi: E_3, E_7, E_{11}, E_{15} 1p

Urmează: E_5, E_{13} 1p

În ultima etapă este eliminat E_9 și câștigătorul este E_1 1p

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ astfel încât

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}, (\forall)n \in \mathbb{N} \text{ și } f(2014) = \frac{2014}{2015}.$$

a) Să se demonstreze că $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

b) Determinați funcția f .

Soluție.

a) $\frac{1}{n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, de unde rezultă cerința 2p

b) $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Dăm lui n valorile: 0, 1, 2, ..., $n-1$ și obținem:

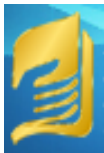
$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = f(0) + 1 - \frac{1}{2} \\ f(2) = f(1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ f(3) = f(2) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots\dots 2p \\ \dots\dots\dots \\ f(n) = f(n-1) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$

Adunând aceste egalități, membru cu membru, obținem:

$f(n) = f(0) + \frac{n}{n+1}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ 1p

$n = 2014 \Rightarrow f(2014) = f(0) + \frac{2014}{2015} \Rightarrow f(0) = 0$ 1p

Așadar $f(n) = \frac{n}{n+1}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$ 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul real $x = \sqrt[5]{100}$.
- Determinați partea întreagă a numărului x .
 - Stabiliți care este numărul întreg cel mai apropiat de x .
 - Demonstrați că există o infinitate de numere reale pozitive $a, a \neq 1$ pentru care $\log_a x$ este număr rațional.

Soluție.

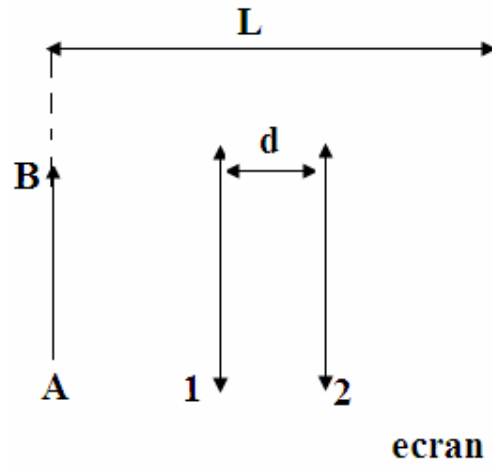
- Cum $2^5 = 32 < 100 < 243 = 3^5$, rezultă că $2 < x < 3$, așadar $[x] = 2$ 2p
- Trebuie comparate numerele x și $\frac{5}{2}$, adică 100 și $\left(\frac{5}{2}\right)^5$, sau $100 \cdot 2^5$ și 5^5 . Cum $100 \cdot 2^5 = 3200$ și $5^5 = 3125$, deducem că $x > \frac{5}{2}$, prin urmare întregul cel mai apropiat de x este 3 3p
- Considerând $a = 10^r$, cu $r \in \mathbb{Q}^*$, obținem că $\log_a x = \log_{10^r} 10^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{5} \cdot \lg 10 = \frac{2}{5r} \in \mathbb{Q}$ 2p

2. Spunem că un număr complex z este de tip I dacă $|z^2 + 1| \leq 1$ și este de tip II dacă $|z + 1| \leq 1$.
- Dați un exemplu de număr complex de tip I care are modulul mai mare decât 1.
 - Demonstrați că o infinitate de numere complexe de tip II au modulul mai mare decât 1.
 - Demonstrați că, dacă un număr complex este atât de tip I cât și de tip II, atunci modulul său este cel mult egal cu 1.

Soluție.

- De exemplu, numărul $z = \frac{5}{4}i$ are modulul $|z| = \frac{5}{4} > 1$ și este de tip I: $|z^2 + 1| = \left| -\frac{25}{16} + 1 \right| = \frac{9}{16} < 1$ 2p
- Numerele complexe de tip II sunt cele ale căror imagini în planul complex aparțin discului $\mathcal{D}(A,1)$, unde $z_A = -1$. Numerele complexe de modul 1 sunt cele ale căror imagini în planul complex aparțin cercului unitate $\mathcal{C}(0,1)$. Evident, există o infinitate de puncte ale discului $\mathcal{D}(A,1)$ situate în exteriorul cercului $\mathcal{C}(0,1)$ 2p
- Avem: $2|z| = |2z| = |(z+1)^2 - (z^2+1)| \leq |z+1|^2 + |z^2+1| \leq 1+1 = 2$, prin urmare $|z| \leq 1$ 3p

3. Măsurarea distanței focale a unei lentile convergente se poate face prin metoda Bessel, care presupune așezarea lentilei între un obiect luminos AB și un ecran, considerate fixe, aflate la distanța L unul față de celălalt. Se constată că există două poziții ale lentilei (1 și 2) pentru care se obțin imagini clare ale obiectului luminos pe ecran, iar cele două poziții sunt situate la distanța d una față de cealaltă.



Aflați distanța focală f a lentilei, funcție de L și d . Se consideră cunoscută formula lentilelor $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, unde p este distanța de la obiect la lentilă, iar p' este distanța de la lentilă la imaginea obiectului (pe ecran).

Soluție.

Scriem formula lentilelor pentru pozițiile 1 și 2 ale lentilei:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \text{ respectiv } \frac{1}{p+d} + \frac{1}{p'-d} = \frac{1}{f}, p + p' = L \dots\dots\dots 2p$$

Prima relație conduce la $Lf = pp'$, iar cea de a doua la $Lf = (p+d)(p'-d)$ 1p

Deducem $pp' = pp' + dp' - dp - d^2$, de unde $p' - p = d$.

$$\text{Însă } p + p' = L \text{ și, de aici, } p = \frac{L-d}{2}, \text{ iar } p' = \frac{L+d}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Astfel, } f = \frac{pp'}{L} = \frac{L^2 - d^2}{4L} \dots\dots\dots 2p$$

4. Comisia centrală a concursului național de matematică "Adolf Haimovici" este formată din cinci membri. Documentele la care lucrează comisia sunt păstrate într-un seif metalic, încuiat cu lacăte diferite. Fiecare dintre membrii comisiei are cheile unor dintre lacăte, astfel încât seiful să poată fi deschis atunci când se întâlnesc cel puțin trei membri ai comisiei și să nu poată fi deschis de doi sau mai puțini membri.

- a) Care este numărul minim de lacăte ale seifului ?
- b) Câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei ?
- c) Care este modul de împărțire a cheilor către membrii comisiei ?

Soluție.

a) Conform enunțului, pentru orice grup de 2 membri trebuie să existe un lacăt a cărui cheie să nu se afle la nici unul dintre ei, dar aceasta să se afle la fiecare dintre cei trei membri absenți, pentru ca prezența oricăruia dintre ei să facă posibilă deschiderea seifului 1p

Așadar, numărul minim de lacăte este egal cu numărul modurilor în care pot fi formate grupe de câte 2 membri dintre cei 5 ai comisiei 1p

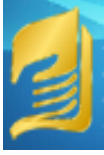
Numărul minim de lacăte este $C_5^2 = 10$ 1p

b) Pentru fiecare lacăt trebuie să existe 3 chei, Cum numărul minim de lacăte este 10 trebuie să existe 30 chei 1p

Fiecare membru al comisiei va avea 6 chei 1p

c) Trebuie ca una dintre cele 3 chei al fiecărui lacăt să se afle la orice grup de 3 membri ai comisiei și ca la fiecare grup de 3 membri să existe un lacăt a cărui cheie să se afle la aceștia și numai la ei 1p

Astfel seiful nu poate fi deschis de îndată ce nu sunt prezenți 3 sau mai mulți membri ai comisiei1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $TrA = a + d$, $\det A = ad - bc$.

a) Să se demonstreze că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $\det(A - I_2) = 2$ și $\det(A + I_2) = 4$, calculați $\det A$ și $\det(A - 2I_2)$.

c) Dacă $A^{2014} = O_2$, demonstrați că $A^2 = O_2$.

Soluție.

a) Calcul 2p

b) Folosind pct a) obținem $Tr(A) = 1$ și $\det(A) = 2$. Rezultă $\det(A - 2I_2) = 4$ 3p

c) Calcul 2p

2. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$. Să se calculeze:

a) Limitele laterale în punctul $x_0 = 0$.

b) Limitele laterale în punctul $x_0 = -1$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Soluție.

a) $l_s = 0, l_d = \infty$ 3p

b) $l_s = \frac{1}{e}, l_d = -\infty$ 2p

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 2p

3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie și coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt $\frac{1}{2}$.

a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?

b) Care este determinantul de valoare minimă ?

Soluție.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \dots\dots\dots 3p$$

a) Valoarea minimă este $\frac{1}{16}$ 3p

b) Determinantul de valoare minimă este cel pentru care $x = \frac{1}{4}$ 1p

4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă iar ceilalți cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii își schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu își schimbă culoarea. Demonstrați că:

a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.

b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde. (Observați că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

Soluție.

a) Notăm cu R numărul cameleonilor roșii, cu G numărul cameleonilor galbeni și cu V numărul cameleonilor verzi 1p

În tabelul de mai jos este exemplificată această posibilitate.

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>
R	3	5	7	9	11	10
G	4	3	2	1	0	2
V	5	4	3	2	1	0

..... 3p

b) Inițial avem $R = 3, G = 4, V = 5$.

Dacă se întâlnește unul roșu cu unul galben, vom avea $R = 2, G = 3, V = 7$.

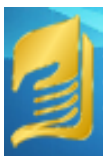
Dacă se întâlnește unul roșu cu unul verde, vom avea $R = 2, G = 6, V = 4$.

Dacă se întâlnește unu galben cu unul verde, vom avea $R = 5, G = 3, V = 4$

..... 1p

Comparăm configurația inițială (3, 4, 5) cu oricare din configurațiile: (2, 3, 7); (2, 6, 4) sau (5, 3, 4), observăm că doar un număr din oricare configurație este multiplu de 3 1p

Dacă ar fi posibil ca la un moment dat toți să fie verzi, am obține configurația (0, 0, 12) în care toate numerele sunt divizibile cu 3. (fals) 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ și $\forall k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$
 .
- b) Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a - b$.
- c) Argumentați că nu există $g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
 $g(2013) = 2014; g(2014) = 2015; g(2015) = 2013$.
- d) Există un polinom $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013) = 2013, h(2014) = 2014$ și $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 și 2014 ?

Soluție.

- a) Calcul elementar 2p
- b) Dacă $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$
 $f(a) - f(b) = a_n (a^n - b^n) + a_{n-1} (a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + a_1 (a - b) : (a - b)$ 2p
- c) Presupunem că există $g \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea din enunț.
 Conform celor demonstrate la punctul b) am obține $(2015 - 2013) | (g(2015) - g(2013)) \Rightarrow 2 | -1$,
 fals 2p
- d) Există h ce satisface cerința. De exemplu $h = \sqrt{2}(X - 2013)(X - 2014) + X$ 1p

2. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$ și $g(x) = e^{-x^2}$.

- a) Calculați $f'(0); f''(0); f'''(0); f^{(4)}(0)$.
- b) Demonstrați că $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) < 0, \forall x < 0$.
- c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul $(0,74; 0,75)$.

Soluție.

- a) $f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'''(x) = e^x - 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(4)}(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

..... 1p

Deducem că $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ 1p

b)

x	$-\infty$							0							$+\infty$
$f^{(4)}(x)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'''(x)$	+	↘	+	↘	+	↘	+	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f''(x)$	-	↗	-	↗	-	↗	-	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f'(x)$	+	↘	+	↘	+	↘	+	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f(x)$	-	↗	-	↗	-	↗	-	0	+	↗	+	↗	+	↗	+

..... 3p

c) $Aria(\Gamma_g) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

Dar:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-x^2} \geq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} \right) \Big|_0^1 = 0,7428571 \dots \dots \dots 1p$$

Din

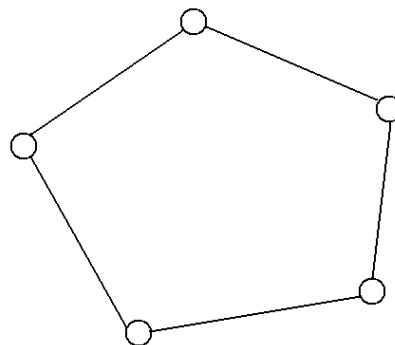
$$\left. \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ \forall x \in (-\infty, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}; \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow e^{-x^2} < 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \right) dx \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx < \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \right) \Big|_0^1 = 0,7474867$$

Finalizare 1p

3. Avem la dispoziție două culori roșu și albastru. Notăm cu \mathcal{F} mulțimea tuturor colorărilor posibile (roșu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{F}$ și $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{F}$ astfel:

- i) dacă vârfurile corespunzătoare lui \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt de culori diferite, atunci în \mathcal{C}_3 vârful va fi colorat cu roșu;
- ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt de aceeași culoare, atunci în \mathcal{C}_3 vârful va fi colorat cu albastru;



- a) Aflați cardinalul mulțimii \mathcal{F} ;
- b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe \mathcal{F} .

Soluție.

a) Fiecare vârf al pentagonului se poate colora în roșu sau albastru.

Deducem card $\mathcal{Z} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 3p

b) Obține că elementul neutru este colorarea în care toate vârfurile pentagonului sunt albastre
..... 4p

4. Admitem cunoscut rezultatul:

Dacă \mathcal{P} este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii \mathcal{P} este punctul $G(x_G, y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene \mathcal{P} definită prin $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$, $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Soluție.

$$y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\pi \sin^2 x dx}{\int_0^\pi \sin x dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx}{-\cos x \Big|_0^\pi} = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{8} \dots\dots\dots 4p$$

Evident $x_G = \frac{\pi}{2}$ (sau prin calcul) 3p