



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



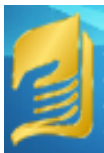
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX-A

1. Un fermier și-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârșitul anului a constatat că:
 - pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 10%;
 - pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 20%;
 - pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.Exprimați, în funcție de x , cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.
2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, considerăm bisectoarea BE , unde $E \in AC$ și punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ și F este mijlocul segmentului AB , demonstrați că punctele F , O și C sunt coliniare.
3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.
 - a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.
 - b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.
4. Să se rezolve ecuația $m \cdot |x-1| = 2015 \cdot x - 1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m .

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe u și v , de modul 1, astfel încât $|u+v| = |u-v| = a$ și punctele O , A , B și C în planul complex, de afixe 0 , u , v respectiv $u+v$.
- Demonstrați că punctele O , A , B și C sunt vârfurile unui pătrat.
 - Determinați valoarea numărului real a .

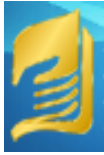
2. Se dă funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1) = a$ și

$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} + \frac{1}{3 \cdot f(2)} + \frac{1}{4 \cdot f(3)} + \dots + \frac{1}{n \cdot f(n-1)} = \frac{n-1}{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

- Calculați $f(2)$, $f(3)$ și $f(4)$ în funcție de a .
 - Demonstrați că $f(n) = n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - Pentru ce valori $a \in \mathbb{N}^*$, funcția este surjectivă.
3. Se dă progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu rația q și astfel încât $b_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculați $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k$, funcție de n , b_1 și q .
 - Demonstrați că $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k \leq \lg \left(\frac{b_1 + b_n}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?

4. Cvadrupla de numere reale (a, b, c, d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$ și apoi procedeul continuă după aceeași regulă cu noua cvadruplă. Găsiți cvadrupele în următoarele cazuri:
- După patru etape, plecând de la cvadrupla $(8, 17, 3, 107)$.
 - După șapte etape, plecând de la cvadrupla $(5, 7, 11, 19)$.
 - După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n, n, 1-4n, n), n \in \mathbb{N}^*$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele spre $-\infty$ și spre $+\infty$ ale graficului funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

2. Se consideră $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \ln \left(\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 3x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\sin nx}{2}\right) \right), n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{și } L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x}.$$

- a) Calculați L_1 . b) Demonstrați că $L_n = \frac{n(n+1)}{4}$. c) Demonstrați că există limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x}$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi

ABC de arie S , iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule și mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei pași ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	P₁	P₂	P₃																																				
<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	3	3	1	3	3	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	1	3	3	3	5	3	3	3	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	3	5	3	5	7	3	3	3	1
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
1	3	3																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
3	5	3																																					
3	3	1																																					
3	5	3																																					
5	7	3																																					
3	3	1																																					

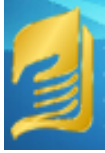
- a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.

b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.

c) Determinați numerele naturale n, A și B , dacă la pasul n tabloul arată ca în figura alăturată.

	P_n	
401	1201	A
p	2015	r
701	q	B

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul inițial $t_0 = 0$. Calculați distanța pe care o parcurge mobilul din momentul inițial și până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanța parcursă de un mobil aflat în mișcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t) dt$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricile lor în raport cu legea " \circ ".

b) Calculați $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2015}{5}$.

3. Se consideră mulțimea

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2\}.$$

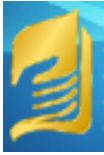
a) Dacă $X \in M$, arătați că $X^2 = O_2$.

b) Dacă $A, B \in M$ și $AB = BA$, demonstrați că $AB \in M$ și $A + B \in M$.

c) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M .

4. Calculați $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a > 0$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Un fermier și-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârșitul anului a constatat că:

- pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 10%;
- pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 20%;
- pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.

Exprimați, în funcție de x , cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.

Soluție.

Fie S suprafața totală cultivată, exprimată în hectare. Suprafețele celor trei parcele sunt $\frac{S}{2}$, $\frac{3S}{10}$

respectiv $\frac{S}{5}$ 2p

Pe prima parcelă, producția obținută este $110\% \cdot x \cdot \frac{S}{2} = \frac{55xS}{100}$. Pe cea de-a doua parcelă, producția

obținută este $120\% \cdot x \cdot \frac{3S}{10} = \frac{36xS}{100}$. Pe cea de-a treia parcelă, producția este $75\% \cdot x \cdot \frac{S}{5} = \frac{15xS}{100}$.

Producția totală obținută este $\frac{106xS}{100}$ 4p

Cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar este $1,06 \cdot x$ 1p

2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, considerăm bisectoarea BE , unde $E \in AC$ și punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ și F este mijlocul segmentului AB , demonstrați că punctele F , O și C sunt coliniare.

Gazeta Matematică 11/2014

Soluție.

Folosind teorema bisectoarei și teorema triunghiului dreptunghic cu unghi de 30° , obținem că

$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} = 2$ 3p

Coliniaritatea punctelor F , O și C revine la concurența dreptelor AD , BE și CF . Întrucât

$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$, concluzia rezultă din reciproca teoremei lui Ceva. 4p

3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.

a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.

b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.

Soluție.

a) Suma celor mai mici 18 pătrate perfecte distincte nenule este $1^2 + 2^2 + \dots + 18^2 = \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} = 2109$. Acest rezultat fiind mai mare decât 2015, rezultă cerința problemei. 3p

b) De exemplu, putem considera numerele 1, 1, 3, 3, 4, 5, ..., 9, 11, 12, ..., 18. 4p

Notă. Pentru descrierea unei strategii prin care se încearcă micșorarea cu 94 a sumei celor mai mici 18 pătrate perfecte distincte nenule se acordă până la 2p

4. Să se rezolve ecuația $m \cdot |x-1| = 2015 \cdot x - 1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m .

Soluție.

Ecuația devine: $\begin{cases} m(x-1) = 2015x-1, \text{ dacă } x \in [1, \infty) \\ m(1-x) = 2015x-1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$ 1p

Cazul $x \in [1, \infty)$.

$m(x-1) = 2015 \cdot x - 1 \Rightarrow (m-2015) \cdot x = m-1, m \neq 2015$ 1p

Rezultă $x = \frac{m-1}{m-2015}$, și din $x \geq 1 \Rightarrow m > 2015$ 1p

Cazul $x \in (-\infty, 1)$

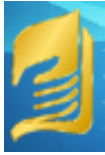
$m(1-x) = 2015 \cdot x - 1 \Rightarrow (m+2015) \cdot x = m+1, m \neq -2015$ 1p

Rezultă $x = \frac{m+1}{m+2015}$, și din $x < 1 \Rightarrow m > -2015$ 1p

Așadar:

Dacă $m > 2015$, ecuația are două soluții: $x_1 = \frac{m-1}{m-2015}$ și $x_2 = \frac{m+1}{m+2015}$ 1p

Dacă $m \in (-2015, 2015]$, ecuația are o singură soluție $x = \frac{m+1}{m+2015}$, iar dacă $m \in (-\infty, -2015]$, ecuația nu are soluții 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe u și v , de modul 1, astfel încât $|u+v|=|u-v|=a$ și punctele O , A , B și C în planul complex, de afixe 0 , u , v respectiv $u+v$.
- Demonstrați că punctele O , A , B și C sunt vârfurile unui pătrat.
 - Determinați valoarea numărului real a .

Soluție.

- Deoarece punctul C are afixul $u+v$, rezultă că $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$ și atunci $OACB$ este paralelogram. Cum $OA = OB = 1$, $OACB$ este chiar romb. Condiția $|u+v|=|u-v|$ ne spune că $OACB$ are diagonalele egale, așadar O , A , B și C sunt vârfurile unui pătrat. 4p
- Numărul a reprezintă lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1, prin urmare $a = \sqrt{2}$ 3p

2. Se dă funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1) = a$ și

$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} + \frac{1}{3 \cdot f(2)} + \frac{1}{4 \cdot f(3)} + \dots + \frac{1}{n \cdot f(n-1)} = \frac{n-1}{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

- Calculați $f(2)$, $f(3)$ și $f(4)$ în funcție de a .
- Demonstrați că $f(n) = n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Pentru ce valori $a \in \mathbb{N}^*$, funcția este surjectivă.

Soluție.

- a) În egalitatea dată, luăm $n = 2, 3, 4$ și obținem:

$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(2) = 2a \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} + \frac{1}{3 \cdot f(2)} = \frac{2}{f(3)} \Rightarrow f(3) = 3a \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} + \frac{1}{3 \cdot f(2)} + \frac{1}{4 \cdot f(3)} = \frac{3}{f(4)} \Rightarrow f(4) = 4a \dots\dots\dots 1p$$

- Presupunem că $f(k) = k \cdot a$ și demonstrăm că $f(k+1) = (k+1) \cdot a \dots\dots\dots 1p$
Conform principiului inducției matematice, rezultă că $f(n) = n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$
- Imaginea acestei funcții este mulțimea $\{f(1), f(2), f(3), \dots\} = \{f(1), 2f(1), 3f(1), \dots\} \dots\dots 1p$
Cum f este surjectivă, deducem că $f(1) = 1$ și atunci $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$

3. Se dă progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu rația q și astfel încât $b_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k$, funcție de n, b_1 și q .

b) Demonstrați că $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k \leq \lg \left(\frac{b_1 + b_n}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?

Soluție.

a) $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k = \frac{1}{n} \cdot (\lg b_1 + \lg b_2 + \lg b_3 + \dots + \lg b_n) = \frac{1}{n} \cdot [\lg b_1 + \lg(b_1 \cdot q) + \lg(b_1 \cdot q^2) + \dots + \lg(b_1 \cdot q^{n-1})]$

$= \frac{1}{n} \cdot \lg \left(b_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right) = \lg \left(b_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \right) \dots\dots\dots 2p$

b) Inegalitatea de demonstrat revine la: $b_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{b_1(1+q^{n-1})}{2} \dots\dots\dots 2p$

$\Leftrightarrow 2 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \leq 1 + q^{n-1} \Leftrightarrow \left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right)^2 \geq 0$ (adevărat) $\dots\dots\dots 2p$

Egalitatea are loc dacă $q = 1$. $\dots\dots\dots 1p$

4. Cvadrupla de numere reale (a, b, c, d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$ și apoi procedeul continuă după aceeași regulă cu noua cvadruplă.

Găsiți cvadruplele în următoarele cazuri:

1°. După patru etape, plecând de la cvadrupla $(8, 17, 3, 107)$.

2°. După șapte etape, plecând de la cvadrupla $(5, 7, 11, 19)$.

3°. După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n, n, 1-4n, n), n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

1°.

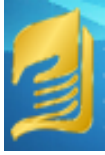
$(8, 17, 3, 107) \longrightarrow (9, 14, 104, 99) \longrightarrow (5, 90, 5, 90) \longrightarrow (85, 85, 85, 85) \longrightarrow (0, 0, 0, 0) \dots\dots 2p$

2°.

$(5, 7, 11, 19) \longrightarrow (2, 4, 8, 14) \longrightarrow (2, 4, 6, 12) \longrightarrow (2, 2, 6, 10) \longrightarrow (0, 4, 4, 8) \longrightarrow (4, 0, 4, 8) \longrightarrow (4, 4, 4, 4) \longrightarrow (0, 0, 0, 0) \dots\dots\dots 2p$

3°.

$(n, n, 1-4n, n) \longrightarrow (0, 5n-1, 5n-1, 0) \longrightarrow (5n-1, 0, 5n-1, 0) \longrightarrow (5n-1, 5n-1, 5n-1, 5n-1) \longrightarrow (0, 0, 0, 0) \dots\dots\dots 3p$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele spre $-\infty$ și spre $+\infty$ ale graficului funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Soluție.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 = m \dots \dots \dots 2p$

și $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2} = n \dots \dots \dots 1p$

se obține că $y = x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty \dots \dots \dots 1p$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1 = m \dots \dots \dots 1p$

și $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{u \rightarrow \infty} (\sqrt{u^2 - u + 1} - u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-u + 1}{\sqrt{u^2 - u + 1} + u} = -\frac{1}{2} = n \dots \dots 1p$

se obține că $y = -x - \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty \dots \dots \dots 1p$

2. Se consideră $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \ln \left(\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 3x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\sin nx}{2}\right) \right), n \in \mathbb{N}^*$

și $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x}$.

a) Calculați L_1 .

b) Demonstrați că $L_n = \frac{n(n+1)}{4}$.

c) Demonstrați că există limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x}$.

Soluție.

a) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right)}{\frac{\sin x}{2}} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 2p

b) Se observă că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin kx}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin kx}{2}\right)}{\frac{\sin kx}{2}} \cdot \frac{\sin kx}{kx} \cdot \frac{k}{2} = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^*$ 1p

$L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)}{x} + \dots + \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin nx}{2}\right)}{x} \right) = \frac{1+2+3+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ 2p

c) Cum $-\frac{1}{2} \leq \frac{\sin kx}{2} \leq \frac{1}{2}$, se obține $\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{\sin kx}{2} \leq \frac{3}{2}$. Rezultă că $6 \ln \frac{1}{2} \leq f_6(x) \leq 6 \ln \frac{3}{2}$ 1p

Întrucât $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ și funcția f_6 este mărginită, rezultă că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x} = 0$ 1p

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi

ABC de arie S , iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

Gazeta Matematică 12/2014 (Supliment)

Soluție.

Avem $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ 2p

Prin înlocuire, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{4S^2}{ab} \\ 1 & b & \frac{4S^2}{bc} \\ 1 & c & \frac{4S^2}{ca} \end{vmatrix} = 4S^2 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{ab} \\ 1 & b & \frac{1}{bc} \\ 1 & c & \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$ 2p

Prin calcul, se obține: $\det A = \frac{4S^2}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = \frac{4S^2}{abc} (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) =$

$\frac{4S^2}{abc} \cdot \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ 2p

$$\det A = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c \dots\dots\dots 1p$$

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule și mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei pași ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	P₁	P₂	P₃																																				
<table border="1" style="display: inline-table; width: 80px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table; width: 80px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	3	3	1	3	3	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table; width: 80px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	1	3	3	3	5	3	3	3	1	<table border="1" style="display: inline-table; width: 80px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	3	5	3	5	7	3	3	3	1
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
1	3	3																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
3	5	3																																					
3	3	1																																					
3	5	3																																					
5	7	3																																					
3	3	1																																					

- a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.
- b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.
- c) Determinați numerele naturale n, A și B , dacă la pasul n tabloul arată ca în figura alăturată.

P_n		
401	1201	A
p	2015	r
701	q	B

Soluție.

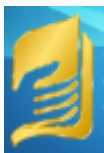
a) La fiecare pas, toate elementele matricei asociate vor fi numere naturale impare. Astfel, determinantul matricei asociată tabloului va fi de forma

$$\begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ 2d+1 & 2e+1 & 2f+1 \\ 2g+1 & 2h+1 & 2i+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2:C_2-C_1 \\ C_3:C_3-C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & 2(b-a) & 2(c-a) \\ 2d+1 & 2(e-d) & 2(f-d) \\ 2g+1 & 2(h-g) & 2(i-g) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2a+1 & b-a & c-a \\ 2d+1 & e-d & f-d \\ 2g+1 & h-g & i-g \end{vmatrix} = 4t, t \in \mathbb{Z} \dots 3p$$

- b) Inițial, suma tuturor elementelor tabloului este 9. La fiecare pas suma crește cu 8. Astfel, la pasul n , suma tuturor elementelor este $9 + 8n$. Însă $9 + 8n = 2015 \Leftrightarrow 8n = 2006$, imposibil.2p
- c) Dacă până la pasul n inclusiv a fost ales pătratul din stânga sus de x ori, cel din dreapta sus de y ori, cel din stânga jos de z ori și cel din dreapta jos de u ori, atunci numerele din tablou vor fi

P_n		
$1+2x$	$1+2(x+y)$	$1+2y$
$1+2(x+z)$	$1+2(x+y+z+u) = 1+2n$	$1+2(y+u)$
$1+2z$	$1+2(z+u)$	$1+2u$

Obținem că $n = 1007, x = 200, y = 400, z = 350, u = 57$, deci $A = 801, B = 115 \dots\dots\dots 2p$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul inițial $t_0 = 0$. Calculați distanța pe care o parcurge mobilul din momentul inițial și până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanța parcursă de un mobil aflat în mișcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t) dt$.

Soluție.

În momentul opririi, viteza mobilului este egală cu zero. Cum viteza este dată de legea $v = 15 - 3t$, timpul până la oprire este $t_1 = 5$3p

Distanța parcursă va fi $x = \int_0^5 (15 - 3t) dt = \left(15t - \frac{3t^2}{2}\right) \Big|_0^5 = 37,5m$ 4p

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricile lor în raport cu legea " \circ ".

b) Calculați $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2015}{5}$.

Soluție.

a) Elementul neutru al legii este $e = \frac{6}{5}$1p

Condiția $x = x'$ revine la $5(x-1)^2 + 1 = e$, adică $|x-1| = \frac{1}{5}$ 2p

Obținem soluțiile $x_1 = \frac{4}{5}$ și $x_2 = \frac{6}{5}$1p

b) Deoarece $x \circ y = 5(x-1)(y-1) + 1$, rezultă că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, pentru orice x real.1p

Numărul $1 = \frac{5}{5}$ se găsește în șirul $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{5}{5}, \dots, \frac{2015}{5}$. Cum legea dată este asociativă, deducem că

$A = \left(\frac{1}{5} \circ \dots \circ \frac{4}{5}\right) \circ 1 \circ \left(\frac{6}{5} \circ \dots \circ \frac{2015}{5}\right) = x \circ 1 \circ y = 1$2p

3. Se consideră mulțimea

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2\}.$$

- a) Dacă $X \in M$, arătați că $X^2 = O_2$.
 b) Dacă $A, B \in M$ și $AB = BA$, demonstrați că $AB \in M$ și $A + B \in M$.
 c) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M .

Soluție.

- a) Pentru orice matrice pătratică de ordin 2, este adevărată egalitatea $X^2 - \text{Tr}X \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$.
 1p
 Din $X^n = O_2$ obținem că $\det X = 0$. Rezultă că $X^2 = \text{Tr}X \cdot X$ de unde, prin inducție,
 $X^n = (\text{Tr}X)^{n-1} \cdot X$ și atunci $\text{Tr}X = 0$ sau $X = O_2$. În ambele situații, obținem $X^2 = O_2$ 2p
 b) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = O_2$, de unde $AB \in M$1p
 Deoarece $AB = BA$ avem $(A + B)^4 = (A^2 + 2AB + B^2)^2 = (2AB)^2 = O_2$, deci $A + B \in M$1p
 c) Presupunem, prin absurd, că I_2 s-ar putea scrie ca sumă de n matrice A_1, A_2, \dots, A_n din M . Atunci
 $\text{Tr}I_2 = \text{Tr}(A_1 + \dots + A_n) = \text{Tr}A_1 + \dots + \text{Tr}A_n = 0$, contradicție.2p

4. Calculați $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a > 0$.

Gazeta Matematică 10/2014 (Supliment)

Soluție.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a \cos x} dx = \frac{1}{a} \int \frac{(e^x + a \cos x) - (e^x - a \sin x)}{e^x + a \cos x} dx = \dots\dots\dots 3p$$

$$= \frac{1}{a} \left(\int dx - \int \frac{(e^x + a \cos x)'}{e^x + a \cos x} dx \right) = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{1}{a} (x - \ln(e^x + a \cos x)) + C = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{e^x}{e^x + a \cos x} \right) + C. \dots\dots\dots 2p$$