INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Un fermier şi-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârşitul anului a constatat că:

- pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 10%;
- pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 20%;
- pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.

Exprimați, în funcție de x, cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.

2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, considerăm bisectoarea BE, unde $E\in AC$ şi punctul $D\in(BC)$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi F este mijlocul segmentului AB, demonstrați că punctele F, O şi C sunt coliniare.

3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.
a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.
b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.

4. Să se rezolve ecuația $m\cdot|x-1|=2015\cdot x-1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe u şi v, de modul 1, astfel încât $|u+v|=|u-v|=a$ şi punctele O, A, B şi C în planul complex, de afixe 0, u, v respectiv $u+v$.
a) Demonstraţi că punctele O, A, B şi C sunt vârfurile unui pătrat.
b) Determinaţi valoarea numărului real a.

2. Se dă funcţia $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1)=a$ şi
$$\frac{1}{2\cdot f(1)}+\frac{1}{3\cdot f(2)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot f(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$$
a) Calculaţi $f(2)$, $f(3)$ şi $f(4)$ în funcţie de a.
b) Demonstraţi că $f(n)=n\cdot a$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
c) Pentru ce valori $a\in\mathbb{N}^*$, funcţia este surjectivă.

3. Se dă progresia geoemtrică $(b_n)_{n\ge 1}$ cu raţia q şi astfel încât $b_n\ge 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
a) Calculaţi $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k$, funcţie de n, b_1 şi q.
b) Demonstraţi că $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k\le \lg\left(\frac{b_1+b_n}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$-
c) Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?

4. Cvadrupla de numere reale (a,b,c,d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)$ şi apoi procedeul continuă după aceeaşi regulă cu noua cvadruplă.
Găsiţi cvadruplele în următoarele cazuri:
1°. După patru etape, plecând de la cvadrupla (8, 17, 3, 107).
2°. După şapte etape, plecând de la cvadrupla (5, 7, 11, 19).
3°. După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n,n,1-4n,n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele spre $-\infty$ şi spre $+\infty$ ale graficului funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}.$$

2. Se consideră $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\ln\left(\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 2x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 3x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\sin nx}{2}\right)\right),\ n\in\mathbb{N}^*$

şi $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}$.

a) Calculați L_1. b) Demonstrați că $L_n=\frac{n(n+1)}{4}$. c) Demonstrați că există limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_6(x)}{x}$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a & h_ah_b\\ 1 & b & h_bh_c\\ 1 & c & h_ch_a\end{pmatrix}$, unde a,b,c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi *ABC* de arie *S*, iar h_a,h_b,h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A\geq 0$. În ce condiții avem $\det A=0$?

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule şi mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei paşi ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	1	1
1	1	1
1	1	1

P$_1$

1	3	3
1	3	3
1	1	1

P$_2$

1	3	3
3	5	3
3	3	1

P$_3$

3	5	3
5	7	3
3	3	1

a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.
b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.
c) Determinați numerele naturale *n*, *A* şi *B*, dacă la pasul *n* tabloul arată ca în figura alăturată.

P$_n$

401	1201	***A***
p	2015	*r*
701	*q*	***B***

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul inițial $t_0 = 0$. Calculați distanța pe care o parcurge mobilul din momentul inițial şi până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanța parcursă de un mobil aflat în mişcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricele lor în raport cu legea "$\circ$" .

b) Calculați $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \ldots \circ \frac{2015}{5}$.

3. Se consideră mulțimea

$$\mathrm{M} = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2 \right\}.$$

a) Dacă $X \in \mathrm{M}$, arătați că $X^2 = O_2$.

b) Dacă $A, B \in \mathrm{M}$ şi $AB = BA$, demonstrați că $AB \in \mathrm{M}$ şi $A + B \in \mathrm{M}$.

c) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M.

4. Calculați $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a\cos x}\mathrm{d}x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $a > 0$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Un fermier şi-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârşitul anului a constatat că:

- pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 10%;
- pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 20%;
- pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.

Exprimați, în funcție de x, cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.

Soluție.

Fie S suprafața totală cultivată, exprimată în hectare. Suprafețele celor trei parcele sunt $\frac{S}{2}, \frac{3S}{10}$ respectiv $\frac{S}{5}$. 2p

Pe prima parcelă, producția obținută este $110\% \cdot x \cdot \frac{S}{2} = \frac{55xS}{100}$. Pe cea de-a doua parcelă, producția obținută este $120\% \cdot x \cdot \frac{3S}{10} = \frac{36xS}{100}$. Pe cea de-a treia parcelă, producția este $75\% \cdot x \cdot \frac{S}{5} = \frac{15xS}{100}$.
Producția totală obținută este $\frac{106xS}{100}$. 4p

Cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar este $1,06 \cdot x$. 1p

2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, considerăm bisectoarea BE, unde $E \in AC$ şi punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ şi F este mijlocul segmentului AB, demonstrați că punctele F, O şi C sunt coliniare.

Gazeta Matematică 11/2014

Soluție.

Folosind teorema bisectoarei şi teorema triunghiului dreptunghic cu unghi de 30°, obținem că $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} = 2$. 3p

Coliniaritatea punctelelor F, O şi C revine la concurența dreptelor AD, BE şi CF. Întrucât $\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$, concluzia rezultă din reciproca teoremei lui Ceva. 4p

3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.
a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.
b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.

Soluție.
a) Suma celor mai mici 18 pătrate perfecte distincte nenule este $1^2+2^2+...+18^2=$ $=\frac{18\cdot 19\cdot 37}{6}=2109$. Acest rezultat fiind mai mare decât 2015, rezultă cerința problemei. ……..... 3p
b) De exemplu, putem considera numerele 1, 1, 3, 3, 4, 5, … , 9, 11, 12, … , 18. …….………… 4p
Notă. Pentru descrierea unei strategii prin care se încearcă micşorarea cu 94 a sumei celor mai mici 18 pătrate perfecte distincte nenule se acordă până la 2p

4. Să se rezolve ecuația $m\cdot|x-1|=2015\cdot x-1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m.

Soluție.
Ecuația devine: $\begin{cases} m(x-1)=2015x-1, \text{ dacă } x\in[1,\infty) \\ m(1-x)=2015x-1, \text{ dacă } x\in(-\infty,1) \end{cases}$ 1p
Cazul $x\in[1,\infty)$.
$m(x-1)=2015\cdot x-1 \Rightarrow (m-2015)\cdot x=m-1, m\neq 2015$ 1p
Rezultă $x=\frac{m-1}{m-2015}$, şi din $x\geq 1 \Rightarrow m>2015$ 1p
Cazul $x\in(-\infty,1)$
$m(1-x)=2015\cdot x-1 \Rightarrow (m+2015)\cdot x=m+1, m\neq -2015$ 1p
Rezultă $x=\frac{m+1}{m+2015}$, şi din $x<1 \Rightarrow m>-2015$ 1p
Aşadar:
Dacă $m>2015$, ecuația are două soluții: $x_1=\frac{m-1}{m-2015}$ şi $x_2=\frac{m+1}{m+2015}$ 1p
Dacă $m\in(-2015,2015]$, ecuația are o singură soluție $x=\frac{m+1}{m+2015}$, iar dacă $m\in(-\infty,-2015]$, ecuația nu are soluții 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe u şi v, de modul 1, astfel încât $|u+v|=|u-v|=a$ şi punctele O, A, B şi C în planul complex, de afixe 0, u, v respectiv $u+v$.
a) Demonstraţi că punctele O, A, B şi C sunt vârfurile unui pătrat.
b) Determinaţi valoarea numărului real a.

Soluţie.
a) Deoarece punctul C are afixul $u+v$, rezultă că $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ şi atunci $OACB$ este paralelogram. Cum $OA=OB=1$, $OACB$ este chiar romb. Condiţia $|u+v|=|u-v|$ ne spune că $OACB$ are diagonalele egale, aşadar O, A, B şi C sunt vârfurile unui pătrat. 4p
b) Numărul a reprezintă lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1, prin urmare $a=\sqrt{2}$. 3p

2. Se dă funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1)=a$ şi
$$\frac{1}{2\cdot f(1)}+\frac{1}{3\cdot f(2)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot f(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$$
a) Calculaţi $f(2)$, $f(3)$ şi $f(4)$ în funcţie de a.
b) Demonstraţi că $f(n)=n\cdot a, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
c) Pentru ce valori $a\in\mathbb{N}^*$, funcţia este surjectivă.

Soluţie.
a) În egalitatea dată, luăm $n=2, 3, 4$ şi obţinem:
$$\frac{1}{2\cdot f(1)}=\frac{1}{f(2)}\Rightarrow f(2)=2a$$ 1p
$$\frac{1}{2\cdot f(1)}+\frac{1}{3\cdot f(2)}=\frac{2}{f(3)}\Rightarrow f(3)=3a$$ 1p
$$\frac{1}{2\cdot f(1)}+\frac{1}{3\cdot f(2)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}=\frac{3}{f(4)}\Rightarrow f(4)=4a$$ 1p
b) Presupunem că $f(k)=k\cdot a$ şi demonstrăm că $f(k+1)=(k+1)\cdot a$ 1p
Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $f(n)=n\cdot a$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. 1p
c) Imaginea acestei funcţii este mulţimea $\{f(1), f(2), f(3), \ldots\}=\{f(1), 2f(1), 3f(1), \ldots\}$ 1p
Cum f este surjectivă, deducem că $f(1)=1$ şi atunci $f(n)=n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

3. Se dă progresia geoemtrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu rația q şi astfel încât $b_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k$, funcție de n, b_1 şi q .

b) Demonstrați că $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k \leq \lg\left(\frac{b_1+b_n}{2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$-

c) Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?

Soluție.

a) $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k = \frac{1}{n}\cdot\left(\lg b_1+\lg b_2+\lg b_3+...+\lg b_n\right)=\frac{1}{n}\cdot\left[\lg b_1+\lg\left(b_1\cdot q\right)+\lg\left(b_1\cdot q^2\right)+...+\lg\left(b_1\cdot q^{n-1}\right)\right]$

$=\frac{1}{n}\cdot\lg\left(b_1^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=\lg\left(b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)$ 2p

b) Inegalitatea de demonstrat revine la: $b_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\leq\frac{b_1\left(1+q^{n-1}\right)}{2}$ 2p

$\Leftrightarrow 2\cdot q^{\frac{n-1}{2}}\leq 1+q^{n-1} \Leftrightarrow \left(q^{\frac{n-1}{2}}-1\right)^2\geq 0$ (adevărat) 2p

Egalitatea are loc dacă $q=1$. 1p

4. Cvadrupla de numere reale (a,b,c,d) trece, în prima etapă în cvadrupla $\left(|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|\right)$ şi apoi procedeul continuă după aceeaşi regulă cu noua cvadruplă. Găsiți cvadruplele în următoarele cazuri:

1°. După patru etape, plecând de la cvadrupla (8, 17, 3, 107).

2°. După şapte etape, plecând de la cvadrupla (5, 7, 11, 19).

3°. După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n,n,1-4n,n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție.

1°.

(8, 17, 3, 107) $\longrightarrow$ (9, 14, 104, 99) $\longrightarrow$ (5, 90, 5, 90) $\longrightarrow$ (85, 85, 85, 85) $\longrightarrow$ (0, 0, 0, 0) 2p

2°.

(5, 7, 11, 19) $\longrightarrow$ (2, 4, 8, 14) $\longrightarrow$ (2, 4, 6, 12) $\longrightarrow$ (2, 2, 6, 10) $\longrightarrow$ (0, 4, 4, 8) $\longrightarrow$ (4, 0, 4, 8) $\longrightarrow$ (4, 4, 4, 4) $\longrightarrow$ (0, 0, 0, 0) 2p

3°.

$(n,n,1-4n,n)\longrightarrow(0,5n-1,5n-1,0)\longrightarrow(5n-1,0,5n-1,0)\longrightarrow(5n-1,5n-1,5n-1,5n-1)$
$\longrightarrow(0,0,0,0)$ 3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Determinaţi asimptotele spre $-\infty$ şi spre $+\infty$ ale graficului funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}.$$

Soluţie.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1=m$...2p

şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1}{2}=n$..1p

se obţine că $y=x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ 1p

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1=m$...1p

şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim\limits_{u\to\infty}\left(\sqrt{u^2-u+1}-u\right)=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{-u+1}{\sqrt{u^2-u+1}+u}=-\frac{1}{2}=n$....1p

se obţine că $y=-x-\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p

2. Se consideră $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\ln\left(\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 2x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 3x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\sin nx}{2}\right)\right), n\in\mathbb{N}^*$

şi $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}$.

a) Calculaţi L_1.

b) Deminstraţi că $L_n=\frac{n(n+1)}{4}$.

c) Demonstraţi că există limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_6(x)}{x}$.

Soluție.

a) $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)}{\frac{\sin x}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 2p

b) Se observă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin kx}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin kx}{2}\right)}{\frac{\sin kx}{2}}\cdot\frac{\sin kx}{kx}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k}{2},k\in\mathbb{N}^*$ 1p

$$L_n=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{\sin 2x}{2}\right)}{x}+\ldots+\frac{\ln\left(1+\frac{\sin nx}{2}\right)}{x}\right)=\frac{1+2+3+\ldots+n}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$$ 2p

c) Cum $-\frac{1}{2}\le\frac{\sin kx}{2}\le\frac{1}{2}$, se obține $\frac{1}{2}\le 1+\frac{\sin kx}{2}\le\frac{3}{2}$. Rezultă că $6\ln\frac{1}{2}\le f_6(x)\le 6\ln\frac{3}{2}$................1p

Întrucât $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ şi funcția f_6 este mărginită, rezultă că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_6(x)}{x}=0$ 1p

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a & h_ah_b\\ 1 & b & h_bh_c\\ 1 & c & h_ch_a\end{pmatrix}$, unde a,b,c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi ABC de arie S, iar h_a,h_b,h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A\ge 0$. În ce condiții avem $\det A=0$?

Gazeta Matematică 12/2014 (*Supliment*)

Soluție.

Avem $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$ 2p

Prin înlocuire, $\det A=\begin{vmatrix}1 & a & h_ah_b\\ 1 & b & h_bh_c\\ 1 & c & h_ch_a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & \frac{4S^2}{ab}\\ 1 & b & \frac{4S^2}{bc}\\ 1 & c & \frac{4S^2}{ca}\end{vmatrix}=4S^2\begin{vmatrix}1 & a & \frac{1}{ab}\\ 1 & b & \frac{1}{bc}\\ 1 & c & \frac{1}{ca}\end{vmatrix}$ 2p

Prin calcul, se obține: $\det A=\frac{4S^2}{abc}\begin{vmatrix}1 & a & c\\ 1 & b & a\\ 1 & c & b\end{vmatrix}=\frac{4S^2}{abc}\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$

$\frac{4S^2}{abc}\cdot\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$..2p

$\det A = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$..1p

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule şi mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei paşi ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	1	1
1	1	1
1	1	1

P$_1$

1	3	3
1	3	3
1	1	1

P$_2$

1	3	3
3	5	3
3	3	1

P$_3$

3	5	3
5	7	3
3	3	1

a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.
b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.
c) Determinați numerele naturale n, A şi B, dacă la pasul n tabloul arată ca în figura alăturată.

P$_n$

401	1201	***A***
p	2015	r
701	q	***B***

Soluție.
a) La fiecare pas, toate elementele matricei asociate vor fi numere naturale impare. Astfel, determinantul matricei asociată tabloului va fi de forma

$$\begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ 2d+1 & 2e+1 & 2f+1 \\ 2g+1 & 2h+1 & 2i+1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2:C_2-C_1 \\ C_3:C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2a+1 & 2(b-a) & 2(c-a) \\ 2d+1 & 2(e-d) & 2(f-d) \\ 2g+1 & 2(h-g) & 2(i-g) \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2a+1 & b-a & c-a \\ 2d+1 & e-d & f-d \\ 2g+1 & h-g & i-g \end{vmatrix} = 4t, t\in\mathbb{Z}$$....3p

b) Inițial, suma tuturor elementelor tabloului este 9. La fiecare pas suma creşte cu 8. Astfel, la pasul n, suma tuturor elementelor este $9+8n$. Însă $9+8n=2015 \Leftrightarrow 8n=2006$, imposibil. 2p
c) Dacă până la pasul n inclusiv a fost ales pătratul din stânga sus de x ori, cel din dreapta sus de y ori, cel din stânga jos de z ori şi cel din dreapta jos de u ori, atunci numerele din tablou vor fi

P$_n$

$1+2x$	$1+2(x+y)$	$1+2y$
$1+2(x+z)$	$1+2(x+y+z+u)=$ $1+2n$	$1+2(y+u)$
$1+2z$	$1+2(z+u)$	$1+2u$

Obținem că $n = 1007$, $x = 200$, $y = 400$, $z = 350$, $u = 57$, deci $A = 801$, $B = 115$…………...............2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul iniţial $t_0 = 0$. Calculaţi distanţa pe care o parcurge mobilul din momentul iniţial şi până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanţa parcursă de un mobil aflat în mişcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

Soluţie.
În momentul opririi, viteza mobilului este egală cu zero. Cum viteza este dată de legea $v = 15 - 3t$, timpul până la oprire este $t_1 = 5$. 3p

Distanţa parcursă va fi $x = \int_0^5 (15-3t)\,\mathrm{d}t = \left(15t - \frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 37,5m$. 4p

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinaţi numerele reale egale cu simetricele lor în raport cu legea "$\circ$" .

b) Calculaţi $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \ldots \circ \frac{2015}{5}$.

Soluţie.
a) Elementul neutru al legii este $e = \frac{6}{5}$. 1p

Condiţia $x = x'$ revine la $5(x-1)^2 + 1 = e$, adică $|x-1| = \frac{1}{5}$. 2p

Obţinem soluţiile $x_1 = \frac{4}{5}$ şi $x_2 = \frac{6}{5}$. 1p

b) Deoarece $x \circ y = 5(x-1)(y-1) + 1$, rezultă că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, pentru orice x real. 1p

Numărul $1 = \frac{5}{5}$ se găseşte în şirul $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{5}{5}, \ldots, \frac{2015}{5}$. Cum legea dată este asociativă, deducem că $A = \left(\frac{1}{5} \circ \ldots \circ \frac{4}{5}\right) \circ 1 \circ \left(\frac{6}{5} \circ \ldots \circ \frac{2015}{5}\right) = x \circ 1 \circ y = 1$. 2p

3. Se consideră mulțimea

$$\mathrm{M} = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2 \right\}.$$

a) Dacă $X \in \mathrm{M}$, arătați că $X^2 = O_2$.
b) Dacă $A, B \in \mathrm{M}$ şi $AB = BA$, demonstrați că $AB \in \mathrm{M}$ şi $A + B \in \mathrm{M}$.
c) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M.

Soluție.
a) Pentru orice matrice pătratică de ordin 2, este adevărată egalitatea $X^2 - TrX \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$. ………………………………………………………………………………………..……………. 1p
Din $X^n = O_2$ obținem că $\det X = 0$. Rezultă că $X^2 = TrX \cdot X$ de unde, prin inducție, $X^n = (TrX)^{n-1} \cdot X$ şi atunci $TrX = 0$ sau $X = O_2$. În ambele situații, obținem $X^2 = O_2$ …..……..2p
b) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = O_2$, de unde $AB \in \mathrm{M}$. ………………...….1p
Deoarece $AB = BA$ avem $(A+B)^4 = (A^2 + 2AB + B^2)^2 = (2AB)^2 = O_2$, deci $A + B \in \mathrm{M}$. ..…..….1p
c) Presupunem, prin absurd, că I_2 s-ar putea scrie ca sumă de n matrice A_1, A_2, …, A_n din M. Atunci $TrI_2 = Tr(A_1 + ... + A_n) = TrA_1 + ... + TrA_n = 0$, contradicție. ……………………………………..…2p

4. Calculați $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a\cos x}\,\mathrm{d}x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $a > 0$.

Gazeta Matematică 10/2014 (*Supliment*)

Soluție.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{\left(e^x + a\cos x\right) - \left(e^x - a\sin x\right)}{e^x + a\cos x}\,\mathrm{d}x = \text{…………………………………..……… 3p}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\int \mathrm{d}x - \int \frac{\left(e^x + a\cos x\right)'}{e^x + a\cos x}\,\mathrm{d}x \right) = \text{………………………………………………………… 2p}$$

$$= \frac{1}{a}\left(x - \ln\left(e^x + a\cos x\right)\right) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{e^x}{e^x + a\cos x}\right) + C. \text{ ……………………………………….. 2p}$$