



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

Profil Filologie / Științe sociale

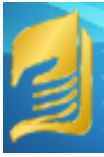


FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (3m-2)x + m - 4, m \in \mathbb{R}$ 
  - a) Să se determine valorile parametrului real  $m$ , astfel încât punctul  $A(m-4, 14)$  să aparțină graficului funcției  $f$ .
  - b) Pentru  $m=1$  să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție ale graficului funcției  $f$  cu axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  și de punctul de coordonate  $(-4, 0)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - mx + m - 1, m \in \mathbb{R}$ .
  - a) Să se determine valorile parametrului real  $m$  astfel încât graficul funcției să intersecteze axa  $Ox$  în două puncte simetrice față de axa  $Oy$ .
  - b) Determinați valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care ecuația atașată funcției  $f$  admite două rădăcini reale, inverse una alteia.
3. Fie  $M$  un punct pe latura  $[BC]$  a triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că:
  - a) Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $[BC]$ , atunci:  $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ .
  - b) Dacă  $P \in [BC]$  astfel încât  $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{2}$  atunci  $\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$ .
4. O minge cade de la o înălțime de 8 m. După fiecare contact cu solul, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut. Demonstrați că distanța parcursă de minge de la început până atinge solul a 100-a oară nu depășește 24 m.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICĂTĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

Profil Filologie / Științe sociale



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. În mulțimea numerelor reale, determinați soluțiile ecuațiilor:

a)  $(\sqrt[2]{2})^x \cdot (\sqrt[3]{2})^{x+1} = (0,25)^{-1}$

b)  $x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = 100$

2. Se dă funcția  $f: \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}, f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

a) Să se determine domeniul maxim de definiție a funcției  $f$ .

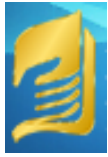
b) Să se cerceteze dacă  $f$  este funcție impară.

c) Demonstrați că funcția  $f$  este inversabilă și determinați inversa ei.

3. Un angrosist cumpără un anumit număr de aparate de fotografiat pentru suma totală de 21600 lei. Dacă el cumpără cu 30 de aparate mai mult, vânzătorul îi acordă o reducere de 20 lei la fiecare aparat și angrosistul va plăti astfel 24000 lei. Câte aparate a cumpărat angrosistul și cât costă un aparat dacă acesta acceptă oferta vânzătorului?

4. Trei elevi, Matei, Raluca și Vlad și-au cumpărat, fiecare, o aceeași carte. Din banii pe care îi aveau fiecare, Matei a cheltuit 100%, Raluca  $\frac{5}{9}$ , iar Vlad 50%. Apoi ei au împărțit toți banii rămași în mod egal. Astfel, Matei a primit de la Raluca 1 leu. Câți lei a avut fiecare înainte de a cumpăra cartea?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

Profil Filologie / Științe sociale



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

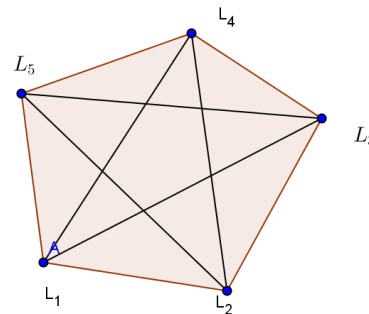
## CLASA A XI-A

1. Considerăm un eșantion al unei populații statistice. Măsurând înălțimea fiecărei persoane, obținem rezultatele date în tabelul de mai jos:

Clasa de valori exprimată în cm	Frecvența absolută cumulată crescător
[160,165)	7
[165,170)	23
[170,175)	60
[175,180)	100
[180,185)	111
[185,190)	118

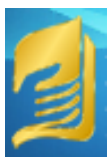
- a) Calculați frecvența absolută ce corespunde clasei [175,180).  
b) Calculați modulul seriei statistice dată prin tabelul de mai sus.  
c) Calculați înălțimea medie a grupului de persoane din eșantion.
2. Spunem că o mașină are „*randament bun*” dacă produce cel mult 6% rebuturi. Într-un lot de 980 piese produse de o astfel de mașină s-au găsit 68 piese rebutate.  
a) Demonstrați că mașina nu are „*randament bun*”.  
b) Care ar fi fost numărul maxim de piese rebutate pentru ca mașina să aibă un „*randament bun*”?  
c) Cu cât la sută trebuie redus numărul de piese rebutate pentru ca mașina să aibă un „*randament bun*”?

3. Se consideră un graf cu 10 vârfuri și 45 de muchii.  
a) Să se demonstreze că dacă înlăturăm cel mult opt muchii obținem un graf conex.  
b) O comună este formată din cinci localități, legate prin șosele ca în figura alăturată. Dacă cel puțin șapte șosele sunt asfaltate, să se arate că între oricare două localități putem identifica un traseu asfaltat.



4. Se dă graful  $G \equiv \{V, U\}$ , unde:  $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$  și  $U = \{[x_1, x_2]; [x_1, x_4]; [x_1, x_5]; [x_2, x_3]; [x_2, x_6]; [x_3, x_4]; [x_3, x_7]; [x_4, x_8]; [x_5, x_6]; [x_5, x_8]; [x_6, x_7]; [x_7, x_8]\}$   
a) Să se demonstreze că acest graf admite reprezentare planară.  
b) Câte muchii trebuie să eliminăm din acest graf pentru a obține un subgraf arbore cu un număr maxim de muchii? Reprezentați un astfel de subgraf arbore.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

Profil Filologie / Științe sociale



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie matricele:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = A \cdot B$ .

a) Demonstrați că  $A^4 = B^6 = I_2$ .

b) Demonstrați că  $C^n \neq I_2$ , pentru orice  $n$  număr natural nenul.

2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Verificați egalitatea:  $A^2 - A - 2I_3 = O_3$ .

b) Demonstrați că  $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015}(A + I_3)$ .

3. Fie  $a, b, c$  numere întregi impare distincte și fie punctele  $A(b, c)$ ;  $B(c, a)$ ;  $C(a, b)$ , și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

a) Demonstrați că are loc egalitatea:  $\Delta = -\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$ .

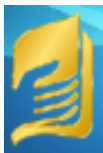
b) Pot fi punctele  $A, B, C$  coliniare? Justificați răspunsul!

c) Demonstrați că aria triunghiului  $ABC$  este un număr natural.

4. În matricea de mai jos, pe fiecare linie și pe fiecare coloană trebuie să fie două elemente colorate roșu și două elemente colorate negru. Știind că elementele  $a_{11}$ ,  $a_{13}$  și  $a_{23}$  sunt colorate roșu, iar  $a_{34}$  este colorat negru, aflați ce culori vor avea elementele  $a_{32}$  și  $a_{42}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

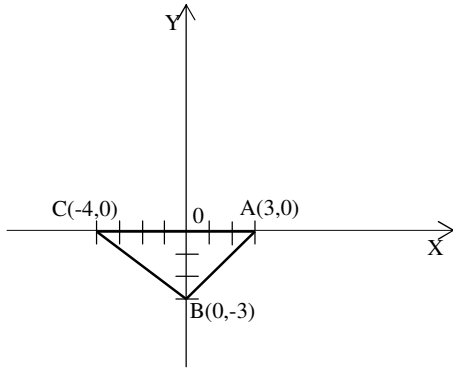


FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (3m-2)x + m-4, m \in \mathbb{R}$
- a) Să se determine valorile parametrului real  $m$ , astfel încât punctul  $A(m-4, 14)$  să aparțină graficului funcției  $f$ .
- b) Pentru  $m=1$  să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele de intersecție ale graficului funcției  $f$  cu axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  și de punctul de coordonate  $(-4, 0)$ .

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$A(m-4, 14) \in G_f \Leftrightarrow f(m-4) = 14$	1 p.
	Rezultă: $(3m-2) \cdot (m-4) + m-4 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 - 13m - 10 = 0$	1 p.
	Obținem: $m \in \left\{ -\frac{3}{5}, 5 \right\}$	1 p.
b).	Pentru $m=1 \Rightarrow f(x) = x-3$	1 p.
	$G_f \cap (O_x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 0)$	
	$G_f \cap (O_y) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -3 \Rightarrow B(0, -3)$	1 p.
	 <p>Figură corect reprezentată (suport intuitiv)</p>	1 p.
	$S = \sigma(ABC) = \frac{AC \cdot BO}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$	1 p.

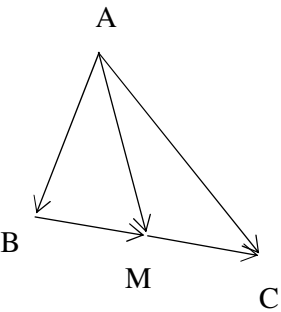
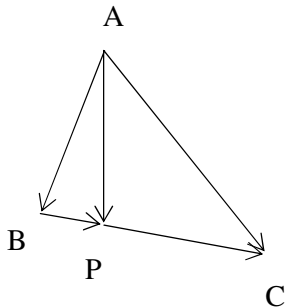
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - mx + m - 1, m \in \mathbb{R}$ .
- a) Să se determine valorile parametrului real  $m$  astfel încât graficul funcției să intersecteze axa  $Ox$  în două puncte simetrice față de axa  $Oy$ .
- b) Determinați valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care ecuația atașată funcției  $f$  admite două rădăcini reale, inverse una alteia.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
	$G_f \cap (O_x) \Rightarrow f(x) = 0$	1 p.
	Trebuie să avem: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 = -x_2$	1 p.
a).	Condiții: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 0 \\ P < 0 \end{cases}$	2 p.
	$\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 > 0$ , pentru $m \neq -2$	1 p.
	$S = m = 0$ ; $P = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$ . Deci $m = 0$	1 p.
b).	Condiții: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-2)^2 \geq 0 \\ m-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2$	1 p.

3. Fie  $M$  un punct pe latura  $[BC]$  a triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că:

a) Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $[BC]$ , atunci:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .

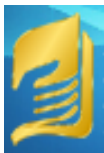
b) Dacă  $P \in [BC]$  astfel încât  $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{2}$  atunci  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).		
	$\triangle ABC : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$	1 p.
	$\triangle ACM : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$	1 p.
	Rezultă: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$	1 p.
b).	Din: $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = 2 \cdot \overrightarrow{BP}$	1 p.
		
	$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$	1 p.
	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$	1 p.

$\overline{AP} = \overline{AB} + \frac{1}{3}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$	1 p.
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------

4. O minge cade de la o înălțime de 8 m. După fiecare contact cu solul, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut. Demonstrați că distanța parcursă de minge de la început până atinge solul a 100-a oară nu depășește 24 m.

<b>SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte</b>	
La prima atingere a solului mingea coboară 8m. și urcă 4m. La a doua atingere a solului mingea coboară 4m. și urcă 2m., la a treia atingere a solului coboară 2m. și urcă 1m., s.a.m.d.	1 p.
$d = (2^3 + 2^2) + (2^2 + 2) + (2 + 1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots +$ $+ \left(\frac{1}{2^{95}} + \frac{1}{2^{96}}\right) + \frac{1}{2^{96}}$	2 p.
$d = 21 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{96}} + \frac{1}{2^{96}}\right)$	2 p.
$d = 23 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{95}}\right) = 23 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{95}}}{1 - \frac{1}{2}} = 24 - \frac{1}{2^{95}} < 24$	2 p.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE  
CLASA A X-A

1. În mulțimea numerelor reale, determinați soluțiile ecuațiilor:

a)  $(\sqrt[2]{2})^x \cdot (\sqrt[3]{2})^{x+1} = (0,25)^{-1}$

b)  $x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = 100$

<b>SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte</b>		
a).	$2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^2$	2 p.
	$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$	1 p.
	<u>Condițiile de existență</u> $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	1 p.
b).	Logaritmăm ambii membri ai ecuației date și obținem: $\lg x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = \lg 10^2$	2 p.
	Rezultă: $\frac{\lg x+1}{\lg x} \cdot \lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	1 p.

2. Se dă funcția  $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}, f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

- a) Să se determine domeniul maxim de definiție a funcției  $f$ .
- b) Să se cerceteze dacă  $f$  este funcție impară.
- c) Demonstrați că funcția  $f$  este inversabilă și determinați inversa ei.

<b>SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte</b>		
a).	<u>Condițiile de existență</u> : $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D \equiv (-1,1)$	1 p.
b).	$f(-x) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x) \Rightarrow f$ este funcție impară.	1 p.
c).	O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă. <u>Injectivitatea.</u> $[(\forall) x_1, x_2 \in (-1,1), \text{ din } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ soluție unică}]$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$	1 p.



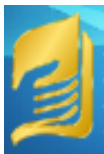
<u>Surjectivitatea:</u> $[(\forall) y \in \mathbb{R}, (\exists) x \in (-1,1), \text{ a. } \hat{=} y = f(x)]$	
Fie $(\forall) y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \lg 10^y = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow x = \frac{1-10^y}{1+10^y}$	2 p.
Demonstrează că $-1 < x < 1$	1 p.
Cum $f$ este bijectivă, rezultă că $f$ este inversabilă și inversa funcției $f$ este funcția $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-1,1), f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$ .	1 p.

3. Un angrosist cumpără un anumit număr de aparate de fotografiat pentru suma totală de 21600 lei. Dacă el cumpără cu 30 de aparate mai mult, vânzătorul îi acordă o reducere de 20 lei la fiecare aparat și angrosistul va plăti astfel 24000 lei. Câte aparate a cumpărat angrosistul și cât costă un aparat dacă acesta acceptă oferta vânzătorului?

<b>SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte</b>	
Fie $x$ , numărul de aparate cumpărate și $y$ prețul unui aparat	1 p.
Din enunț avem: $\begin{cases} x \cdot y = 21600 \\ (x + 30) \cdot (y - 20) = 24000 \end{cases}$	1 p.
<u>Obținem:</u> $21600 - 20x + 30y - 600 = 24000 \Rightarrow 2x - 3y + 300 = 0$	1 p.
Din $2x - 3 \cdot \frac{21600}{x} + 300 = 0 \Rightarrow x^2 + 150x = 32400 = 0$	2 p.
<u>Rezultă:</u> $x_1 = -270$ (nu convine) și $x_2 = 120$	1 p.
Așadar angrosistul cumpără 120 aparate de fotografiat și fiecare aparat costă 180 lei	1 p.

4. Trei elevi, Matei, Raluca și Vlad și-au cumpărat, fiecare, o aceeași carte. Din banii pe care îi aveau fiecare, Matei a cheltuit 100%, Raluca  $\frac{5}{9}$ , iar Vlad 50%. Apoi ei au împărțit toți banii rămași în mod egal. Astfel, Matei a primit de la Raluca 1 leu. Câți lei a avut fiecare înainte de a cumpăra cartea?

<b>SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte</b>	
Fie $x$ lei prețul cărții	1 p.
Din enunț deducem că Matei a avut $x$ lei, Raluca a avut $\frac{9}{5} \cdot x$ lei, iar Vlad a avut $2x$ lei.	2 p.
După ce fiecare și-a cumpărat cartea, Matei a rămas cu 0 lei, Raluca cu $\left(1 - \frac{5}{9}\right) \cdot x = \frac{4}{9} \cdot x$ lei, iar Vlad cu $x$ lei.	1 p.
Le-au mai rămas $\frac{4}{9} \cdot x + x = \frac{13}{9} \cdot x$ lei, deci fiecare a luat câte $\frac{13}{27} \cdot x$ lei	1 p.
Matei a luat de la Raluca $\frac{4}{9} \cdot x - \frac{13}{27} \cdot x = \frac{1}{27} \cdot x = 1 \Rightarrow x = 27$ lei	1 p.
Așadar Matei a avut 27 lei, Raluca 54 lei, iar Vlad 54 lei.	1 p.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
14 martie 2015

Profil filologie / științe sociale



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE  
CLASA A XI-A

1. Considerăm un eșantion al unei populații statistice. Măsurând înălțimea fiecărei persoane, obținem rezultatele date în tabelul de mai jos:

Clasa de valori exprimată în cm	Frecvența absolută cumulată crescător
[160,165)	7
[165,170)	23
[170,175)	60
[175,180)	100
[180,185)	111
[185,190)	118

- a) Calculați frecvența absolută ce corespunde clasei [175,180).  
b) Calculați modulul seriei statistice dată prin tabelul de mai sus.  
c) Calculați înălțimea medie a grupului de persoane din eșantion.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	Frecvența absolută ce corespunde clasei [175,180) este $100 - 60 = 40$	2 p.
b).	<u>Modulul (dominanta)</u> unei serii statistice este valoarea centrală a clasei corespunzătoare celei mai mari frecvențe. Aceasta este în clasa [175,180), deci modulul seriei statistice este $\frac{175 + 180}{2} = 177,5$ (valoarea centrală a unei clase este media aritmetică a valorilor caracteristicii în extremitățile acelei clase)	2 p.
c).	Înălțimea medie (valoarea medie) a grupului de persoane este media ponderată a valorilor centrale. Obținem: $\frac{7 \cdot 162,5 + 16 \cdot 167,5 + 37 \cdot 172,5 + 40 \cdot 177,5 + 11 \cdot 182,5 + 7 \cdot 187,5}{118} \approx 174,75 \text{ cm.}$	3 p.

2. Spunem că o mașină are „randament bun” dacă produce cel mult 6% rebuturi. Într-un lot de 980 piese produse de o astfel de mașină s-au găsit 68 piese rebutate.

a) Demonstrați că mașina nu are „randament bun”.

b) Care ar fi fost numărul maxim de piese rebutate pentru ca mașina să aibă un „randament bun”?

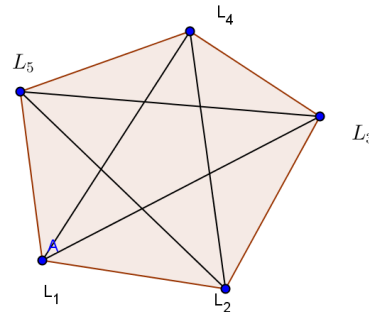
c) Cu cât la sută trebuie redus numărul de piese rebutate pentru ca mașina să aibă un „randament bun”?

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	Procentul rebuturilor este $\left(\frac{68}{980} \cdot 100\right)\% \approx 6,94\% > 6$ , deci mașina nu are „randament bun”	2 p.
b).	Fie $x$ , numărul maxim de piese rebutate. Ar trebui să avem $\frac{x}{980} \leq 0,06 \Rightarrow x \leq 58,8$ Așadar pentru un „randament bun” ar trebui să avem cel mult 58 de rebuturi	2 p.
c).	Trebuie să reducem numărul pieselor rebutate cu cel puțin 10, adică cu $\left(\frac{10}{68} \cdot 100\right)\% \approx 14,7\%$	3 p.

3. Se consideră un graf cu 10 vârfuri și 45 de muchii.

a) Să se demonstreze că dacă înlăturăm cel mult opt muchii obținem un graf conex.

b) O comună este formată din cinci localități, legate prin șosele ca în figura de mai jos. Dacă cel puțin șapte șosele sunt asfaltate, să se arate că între oricare două localități putem identifica un traseu asfaltat.



SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
	Deoarece $C_{10}^2 = 45$ , rezultă că graful este complet	2 p.
a).	Așadar din fiecare vârf pleacă exact 8 muchii. Dacă înlăturăm 8 muchii, rezultă că nici unul dintre cele 10 vârfuri nu este vârf izolat și nici una dintre cele 37 de muchii rămase nu este izolată față de celelalte. Dacă am presupune că o muchie este izolată, atunci numărul maxim de muchii rămase, după înlăturarea celor 8, ar fi $C_8^2 + 1 = 29 < 37$ . Așadar oricare ar fi două vârfuri, există un drum care le unește, deci se obține un subgraf conex. Dacă înlăturăm mai puțin de 8 muchi, cu atât mai mult se obține un graf conex.	2 p.
b).	Din configurația dată deducem că avem un graf complet care are $C_5^2 = 10$ muchii.	1 p.
	Cum cel puțin 7 șosele sunt asfaltate rezultă că cel mult 3 șosele sunt neasfaltate. Din fiecare localitate pleacă exact 4 șosele și cel puțin 3 sunt neasfaltate, putem	2 p.

	pleca pe o șosea asfaltată. Prin înlăturarea celor 3 șosele neasfaltate, obținem un <u>graf conex</u> , deci cerința problemei este satisfăcută	
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

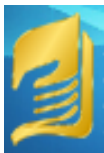
4. Se dă graful  $G \equiv \{V, U\}$ , unde:  $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$  și

$U = \{[x_1, x_2]; [x_1, x_4]; [x_1, x_5]; [x_2, x_3]; [x_2, x_6]; [x_3, x_4]; [x_3, x_7]; [x_4, x_8]; [x_5, x_6]; [x_5, x_8]; [x_6, x_7]; [x_7, x_8]\}$

a) Să se demonstreze că acest graf admite reprezentare planară.

b) Câte muchii trebuie să eliminăm din acest graf pentru a obține un subgraf arbore cu un număr maxim de muchii? Reprezentați un astfel de subgraf arbore.

<b>SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte</b>		
a).	<p>Una dintre reprezentările planare este dată de figura alăturată</p>	3 p.
	<u>Justificare:</u> Muchiile se intersectează doar în vârfuri	1 p.
	Un graf conex și fără cicluri de numește arbore	1 p.
	Graful dat are 5 cicluri cu interioare disjuncte două câte două. Trebuie să eliminăm 5 muchii (câtr una din fiecare ciclu)	1 p.
b).	<p>O soluție este:</p>	1 p.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

**ETAPA JUDEȚEANĂ**  
**14 martie 2015**



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie matricele:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = A \cdot B$ .

a) Demonstrați că  $A^4 = B^6 = I_2$ .

b) Demonstrați că  $C^n \neq I_2$ , pentru orice  $n$  număr natural nenul.

<b>SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte</b>		
a).	$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2$	1 p.
	$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B^6 = B^3 \cdot B^3 = I_2$	1 p.
	$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; C^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ $C^5 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; C^6 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1 p.
b).	Presupunem că: $C^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 2k+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{dacă } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{dacă } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$	2 p.
	Avem: $C^{n+1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 2k+3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{dacă } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^* \\ \begin{pmatrix} 1 & -2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{dacă } n = 2k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$	1 p.
	Așadar: $C^n \neq I_2, (\forall) n \in \mathbb{N}$	1 p.
b).	$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D - I_2, \text{unde } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1 p.
	$C = D - I_2; D^2 = O_2 \Rightarrow D^3 = D^4 = \dots = D^n = O_2$	1 p.

	$D \cdot I_2 = I_2 \cdot D \Rightarrow$ putem aplica formula binomului lui Newton pentru $C^n$	1 p.
	$C^n = (D - I_2)^n = (-1)^n \cdot (I_2 - D)^n =$ $= (-1)^n [I_2^n - C_n^1 \cdot I_2^{n-1} \cdot D + C_n^2 \cdot I_2^{n-2} \cdot D^2 - C_n^3 \cdot I_2^{n-3} \cdot D^3 + \dots] =$ $= (-1)^n \cdot [I_2 - n \cdot D]$	1 p.
	Rezultă: $C^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	1 p.

2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Verificați egalitatea:  $A^2 - A - 2I_3 = O_3$ .

b) Demonstrați că  $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015}(A + I_3)$ .

<b>SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte</b>		
a).	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1 p.
	Verifică (prin calcul direct) egalitatea: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3$	1 p.
	Din: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3 \Rightarrow A^2 + A = 2 \cdot (A + I_3)$	1 p.
	$A^3 + A^2 = 2 \cdot (A^2 + A) = 2^2 \cdot (A + I_3);$ $A^4 + A^3 = 2^2 \cdot (A^2 + A) = 2^3 \cdot (A + I_3)$	1 p.
b).	Presupunem că: $A^{k+1} + A^k = 2^k \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Deducem că: $A^{k+2} + A^{k+1} = 2^k \cdot (A^2 + A) = 2^{k+1} \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Conform inducției complete avem: $A^{n+1} + A^n = 2^n \cdot (A + I_3), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ Pentru $n = 2015$ , obținem: $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015} \cdot (A + I_3)$	1 p.

3. Fie  $a, b, c$  numere întregi impare distincte și fie punctele  $A(b, c); B(c, a); C(a, b)$ , și

determinantul  $\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$ .

a) Demonstrați că are loc egalitatea:  $\Delta = -\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$ .

b) Pot fi punctele  $A, B, C$  coliniare? Justificați răspunsul!

c) Demonstrați că aria triunghiului  $ABC$  este un număr natural.

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
a).	Calcul direct, prin gruparea termenilor din dezvoltarea determinantului $\Delta$ .	1 p.
b).	Punctele A, B, C sunt coliniare dacă: $\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$	1 p.
	$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ ( <i>fals!!!</i> )	1 p.
	Așadar punctele A, B, C nu pot fi coliniare	1 p.
c).	a, b, c sunt numere întregi, impare și distincte. Deci $(a-b)$ ; $(b-c)$ ; $(c-a)$ ,  sunt pare și pătratele sunt multipli de 4	1 p.
	$\sigma(ABC) = \frac{1}{2} \Delta  = \frac{1}{4} \cdot [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$	1 p.
	Rezultă că $\sigma(ABC) \in \mathbb{N}^*$	1 p.

4. În matricea de mai jos, pe fiecare linie și pe fiecare coloană trebuie să fie două elemente colorate roșu și două elemente colorate negru. Știind că elementele  $a_{11}$ ,  $a_{13}$  și  $a_{23}$  sunt colorate roșu, iar  $a_{34}$  este colorat negru, aflați ce culori vor avea elementele  $a_{32}$  și  $a_{42}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
Configurația inițială este:	$\begin{pmatrix} R & a_{12} & R & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & N \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{12}$ , $a_{14}$ , $a_{33}$ , $a_{43}$ sunt colorate în negru		1 p.
Obținem configurația:	$\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{24}$ , $a_{44}$ , $a_{31}$ , $a_{32}$ sunt colorate în negru		1 p.

Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & R \\ R & R & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{21}, a_{22}, a_{41}$ sunt colorate în negru	1 p.
Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ N & N & R & R \\ R & R & N & N \\ N & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$ , de unde deducem că $a_{32}, a_{42}$ sunt colorate în roșu	1 p.