INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin: $x_0=1, x_1=3$ şi $x_{n+2}=2\cdot x_{n+1}+3\cdot x_n, (\forall)n\geq 0.$

a) Demonstrați că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) Calculați $S=\sum\limits_{k=0}^{2015}x_k$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,$ cu $a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $5a+4b+6c=0.$

a) Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, calculați expresia $E(a,b,c)=\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)$, grupând rezultatul după a,b şi c .

b) Demonstrați faptul că există $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)=0$.

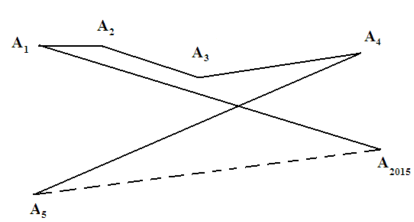
c) Justificați existența unui punct $M_0(x_0,0)$ situat pe graficul funcției *f* cu proprietatea că $x_0\in[0,2]$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația: $x\cdot\left[2+f(x)+f(-x)\right]+2\cdot f(-x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcție impară.

b) Să se determine funcțiile care verifică relația de mai sus.

4. Într-un plan considerăm linia poligonală $\overline{A_1A_2A_3...A_{2015}}$, astfel încât începând cu al doilea segment, fiecare are lungimea de două ori mai mare decât a segmentului precedent. O insectă pleacă din punctul A_1, sărind succesiv în punctele A_2, A_3, A_4, …, A_{2015}. Este posibil ca după un număr finit de sărituri, insecta să se întoarcă în punctul A_1 ? $\left(\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=2^{2014}\cdot l; l=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\right)$



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. În planul complex, se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ a punctelor $M\left(x,y\right)$, $x,y\in\mathbb{R}$, care au proprietatea că $\left|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}\right|=2$.

a) Determinați punctele care au ambele coordonate numere întregi şi care aparţin mulțimii $\mathcal{M}$.
b) Reprezentați geometric mulțimea $\mathcal{M}$ într-un sistem cartezian xOy.

2. Să se rezolve ecuația: $\log_3\left(\log_2 x-9\right)=2+\log_3\left(1-4\log_x 4\right)$.

3. Determinați numerele întregi m pentru care graficul funcţiei
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)\cdot 2^x+(m-6)\cdot 2^{-x}$
intersectează axa Ox într-un punct care are coordonatele numere raționale.

4. La jocul de şah se acordă 1 punct pentru o partidă câştigată, 0,5 puncte pentru o remiză şi 0 puncte pentru înfrângere. Un şahist a jucat 100 de partide de şah şi a acumulat 40 de puncte. Care este diferenţa dintre numărul de partide pierdute şi numărul de partide câştigate ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. a) Demonstraţi că dacă X şi $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot Y = I_3$, atunci $Y \cdot X = I_3$.

b) Demonstraţi că dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = 3AB$, atunci $(3A - I_3)(3B - I_3) = I_3$ şi $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie care verifică inegalitatea $\left|\cos x - 2^x + f(x)\right| \leq x^2, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţi că:

a) $f(0) = 0$;

b) *f* este continuă în punctul $x = 0$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^t = B \cdot B^t = I_3$. Să se demonstreze că cel puţin una dintre matricele $A + B$ sau $A - B$ este singulară (A^t este transpusa matricei *A*) .

4. Un călător parcurge dus – întors acelaşi traseu de lungime *d* în două zile, de fiecare dată în acelaşi interval de ora, $8^{00} - 12^{00}$. În prima zi (la dus) o funcţie continuă şi monotonă $f : [8, 12] \to [0, d]$, exprimă distanţa parcursă de călător pe traseu, iar a doua zi (la întors) o altă funcţie continuă şi monotonă $g : [8, 12] \to [0, d]$, exprimă distanţa parcursă de călător pe traseu, în sens invers, până la fiecare moment orar $t \in [8, 12]$. (în care fracţiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcţia $F : [8, 12] \to \mathbb{R}, F(t) = f(t) + g(t) - d$.

a) Calculaţi $F(8)$ şi $F(12)$.

b) Dacă $t_0 \in [8, 12]$ şi $F(t_0) = 0$, demonstraţi că la momentul t_0 călătorul se află în acelaşi loc pe traseu, atât la dus cât şi la întors.

c) Demonstraţi că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Într-un mediu de cultură sunt, la momentul $t_0 = 0$, 300 bacterii. Numărul de bacterii la momentul $t > 0$ este dat de funcția $n:[0,\infty)\to(0,\infty), n=n(t)$, funcție care satisface relația $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t), (\forall)t\geq 0$.

a) Determinați $n(t)$.

b) Demonstrați că pentru $t\geq 20$, numărul bacteriilor din mediu este mai mare decât 2015.

2. Se considera mulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{Z}_3) \mid X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$

a) Să se demonstreze că $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G,\quad \forall P,Q\in G$;

b) Să se rezolve ecuația $X^2=I_2, X\in G$;

c) Să se demonstreze ca produsul tuturor matricelor din *G*, diferite de O_2, nu depinde de ordinea lor şi să se calculeze acest produs.

3. Se considera polinomul: $f_n=1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+...+\frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}\in\mathbb{C}[X], n\in\mathbb{N}$ şi matricea $A\in M_3(\mathbb{C})$ cu $A^4=O_3$.

a) Să se demonstreze că $f_n=\frac{1}{n!}(X+1)\cdot(X+2)\cdot...\cdot(X+n)$ pentru oricare $n\in\mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_3-x\cdot A)=1, \forall x\in\mathbb{C}$,

c) Să se calculeze $\det(f_3(A))$,

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui *f* .

b) Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficul lui *f* , axa (*Ox*) şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

c) Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,\ln 2], f(x)=\ln(1+tgx)$. Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin: $x_0=1, x_1=3$ şi $x_{n+2}=2\cdot x_{n+1}+3\cdot x_n, (\forall)n\geq 0.$

a) Demonstrați că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) Calculați $S=\sum_{k=0}^{2015}x_k$.

G.M. nr. 1 / 2015 – supliment

<u>Soluție:</u>

a) $x_0=1, x_1=3 \Rightarrow x_2=2\cdot x_1+3\cdot x_0=3^2$ 1p

Presupunem că $x_n=3^n$, $x_{n+1}=3^{n+1}$ 1p

Avem: $x_{n+2}=2\cdot 3^{n+1}+3\cdot 3^n=3^{n+2}$ 1p

Conform principiului inducției matematice complete rezultă că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p

b) $S=\sum_{k=0}^{2015}x_k=1+3+3^2+...+3^{2015}$ 1p

Pentru progresia geometrică $\div b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, de rație $q\neq 1$, suma termenilor este :

$S_n=\dfrac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1} \Rightarrow S=\sum_{k=0}^{2015}x_k=\dfrac{3^{2016}-1}{2}$ 2p

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,$ cu $a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $5a+4b+6c=0.$

a) Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, calculați expresia $E(a,b,c)=\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)$, grupând rezultatul după a,b şi c .

b) Demonstrați faptul că există $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)=0$.

c) Justificați existența unui punct $M_0(x_0,0)$ situat pe graficul funcției f cu proprietatea că $x_0\in[0,2]$.

<u>Soluție:</u>

a) $E(a,b,c)=\alpha\cdot c+\beta\cdot(a+b+c)+\gamma\cdot(4a+2b+c)=a\cdot(\beta+4\gamma)+b\cdot(\beta+2\gamma)+c\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$

.... 1p

b) $E(a,b,c)=0=5a+4b+6c$ 1p

Fie $\begin{cases} \beta+4\gamma=5 \\ \beta+2\gamma=4 \\ \alpha+\beta+\gamma=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{5}{2} \\ \beta=3 \\ \gamma=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 2p

c) Dacă unul dintre numerele $f(0), f(1), f(2)$ este zero rezultă că $x_0 \in \{0,1,2\} \subset [0,2]$ 1p

Dacă $f(0), f(1), f(2)$ sunt numere nenule, din $\frac{5}{2}\cdot f(0)+3\cdot f(1)+\frac{1}{2}\cdot f(2)=0$, rezultă că unul dintre numerele $f(0), f(1), f(2)$ are semn contrar celorlalte două, deci ecuația $ax^2+bx+c=0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0,2)$ 2p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația: $x\cdot\left[2+f(x)+f(-x)\right]+2\cdot f(-x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcție impară.

b) Să se determine funcțiile care verifică relația de mai sus.

Soluție:

a) Dacă $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ 1p

Scriem relația dată punând $-x$ în loc de x 1p

Obținem: $-x\left[2+f(-x)+f(x)\right]+2f(x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p

Avem: $\begin{cases} x\cdot\left[2+f(x)+f(-x)\right]+2\cdot f(-x)=0 \\ -x\cdot\left[2+f(-x)+f(x)\right]+2\cdot f(x)=0 \end{cases}$ 1p

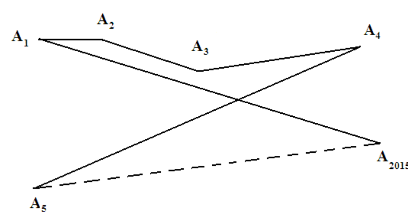
Adunând membru cu membru cele două egalități obținem:

$f(-x)+f(x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$, deci funcția *f* este impară 2p

b) Înlocuind în relația din ipoteză avem $x\cdot\left[2+\cancel{f(x)}-\cancel{f(x)}\right]-2\cdot f(x)=0 \Rightarrow f(x)=x$ 1p

4. Într-un plan considerăm linia poligonală $\overline{A_1A_2A_3...A_{2015}}$, astfel încât începând cu al doilea segment, fiecare are lungimea de două ori mai mare decât a segmentului precedent. O insectă pleacă din punctul A_1, sărind succesiv în punctele A_2, A_3, A_4, …, A_{2015}. Este posibil ca după un număr finit de sărituri, insecta să se întoarcă în punctul A_1 ?

$\left(\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=2^{2014}\cdot l; l=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\right)$



Soluție:

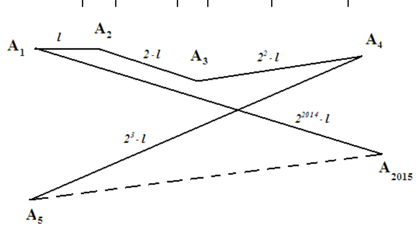
Fie $\operatorname{dist}(A_1,A_2)=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=l.$ Avem: $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|=2l; \left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|=2^2l; \left|\overrightarrow{A_4A_5}\right|=2^3l;...;\left|\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|=2^{2013}l;$

.... 2p

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+...+\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}+\overrightarrow{A_{2015}A_1}=\vec{0}$ 1p

$\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|$ 1p

$\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|\le\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|+...+\left|\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|$ 1p



Presupunând că insecta ar putea reveni în A_1, după un număr finit de sărituri, ar trebui să avem:

$2^{2014}\cdot l\le l+2\cdot l+2^2l+...+2^{2013}l \Rightarrow 2^{2014}\le 1+2+2^2+...+2^{2013}$

$\Rightarrow 2^{2014}\le 2^{2014}-1$ (FALS) 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În planul complex, se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ a punctelor $M(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$, care au proprietatea că $\left|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}\right| = 2$.

a) Determinați punctele care au ambele coordonate numere întregi şi care aparţin mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Reprezentați geometric mulțimea $\mathcal{M}$ într-un sistem cartezian xOy.

Soluție:

a) Punctul $M(x,y)$ se află în $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $x^2+y=5$ şi $y \geq 2$. ……………………….. 2p

Punctele din $\mathcal{M}$ care au ambele coordonate numere întregi sunt $M_1(-1,4), M_2(0,5), M_3(1,4)$. ……………………………... 2p

b) Reprezentarea geometrică a mulțimii $\mathcal{M}$ este arcul din parabola $y=5-x^2$ corespunzător domeniului $x \in \left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. ………………………………………………………………...... 3p

2. Să se rezolve ecuația: $\log_3(\log_2 x-9) = 2+\log_3(1-4\log_x 4)$.

Soluție:

Condiții de existență: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ \log_2 x > 9 \\ 4\log_x 4 < 1 \end{cases}$ 1p

$\log_2 x > 9 \Rightarrow x > 2^9; 4\log_x 4 < 1 \Rightarrow x > 2^8$ 1p

Aşadar: $x > 2^9$ 1p

$\log_3(\log_2 x-9) = \log_3\left[9\cdot(1-4\log_x 4)\right]$ 1p

$\log_2 x - 9 = 9\left(1-\frac{8}{\log_2 x}\right)$ 1p

Notăm $\log_2 x = y$ şi obținem: $y^2-18y+72=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 12 \end{cases}$ 1p

$\log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6$ - nu convine

$\log_2 x = 12 \Rightarrow x = 2^{12}$ - soluție 1p

3. Determinați numerele întregi m pentru care graficul funcției

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)\cdot 2^{x}+(m-6)\cdot 2^{-x}$

intersectează axa Ox într-un punct care are coordonatele numere raționale.

Lucian Dragomir

Soluție.

Graficul funcției intersectează axa Ox atunci când ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală. Ecuația revine la $(m-1)\cdot 2^{2x}+(m-6)=0$, adică $2^{2x}=\dfrac{6-m}{m-1}$, $m\neq 1$. Cum $2^{t}>0,\forall t\in\mathbb{R}$, ajungem la condiția $\dfrac{6-m}{m-1}>0\Leftrightarrow m\in(1,6)$. Numărul *m* fiind întreg, deducem că $m\in\{2,3,4,5\}$ 3p

Pentru $m=3$ obținem ecuația $2^{2x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{2x+1}=3$. Dacă $x\in\mathbb{Q}$, atunci $2x+1=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, unde $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$. Atunci $2^{p}=3^{q}$, egalitate imposibilă (un număr par nu poate fi egal cu unul impar). Analog, pentru $m=4$, ecuația $2^{2x}=\dfrac{2}{3}$ nu are soluții raționale. 2p

Pentru $m=2$ obținem ecuația $2^{2x}=4$, cu soluția $x=1\in\mathbb{Q}$. Pentru $m=5$, vom obține $2^{2x}=\dfrac{1}{4}$, cu soluția $x=-1\in\mathbb{Q}$. În concluzie, dacă $m=2$ sau $m=5$, graficul funcției *f* va intersecta axa Ox în punctul $A(1,0)$, respectiv $A'(-1,0)$. …... 2p

4. La jocul de şah se acordă 1 punct pentru o partidă câştigată, 0,5 puncte pentru o remiză şi 0 puncte pentru înfrângere. Un şahist a jucat 100 de partide de şah şi a acumulat 40 de puncte. Care este diferenţa dintre numărul de partide pierdute şi numărul de partide câştigate ?

<u>Soluție:</u>

Fie *x*, *y* şi respectiv *z*, numărul de partide câştigate, numărul de remize şi numărul de partide pierdute de şahist 2p

Din enunț avem: $\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+0,5\cdot y=40 \end{cases}$ 2p

Rezultă $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2x+y=80 \end{cases}$ 1p

Obținem $z-x=20$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XI-A

1. a) Demonstrați că dacă X și $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot Y = I_3$, atunci $Y \cdot X = I_3$.

b) Demonstrați că dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = 3AB$, atunci $(3A - I_3)(3B - I_3) = I_3$ și $A \cdot B = B \cdot A$.

Soluție:

a) Din $X \cdot Y = I_3 \Rightarrow \det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = \det(I_3) = 1$ 1p

Rezultă că $\det(X) \neq 0$ și $\det(Y) \neq 0$, deci matricele X și Y sunt inversabile 1p

Din $X \cdot Y = I_3 \Rightarrow Y = X^{-1} \Rightarrow Y \cdot X = X^{-1} \cdot X = I_3$ 1p

b) $(3A - I_3)(3B - I_3) = 9AB - 3A - 3B + I_3 = 3(3AB - A - B) + I_3 = I_3$ 1p

Conform cu a) avem și: $(3B - I_3)(3A - I_3) = I_3 \Rightarrow 9BA - 3A - 3B + I_3 = I_3 \Rightarrow 3BA = A + B$ 2p

Din $\begin{cases} A + B = 3A \cdot B \\ A + B = 3B \cdot A \end{cases} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$ 1p

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție care verifică inegalitatea $\left|\cos x - 2^x + f(x)\right| \leq x^2, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$;

b) f este continuă în punctul $x = 0$;

c) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Soluție:

a) În inegalitatea din enunț punem $x = 0$. Rezultă $\left|f(0)\right| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$ 1p

b) $-x^2 \leq \cos x - 2^x + f(x) \leq x^2, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2^x - x^2 - \cos x \leq f(x) \leq 2^x + x^2 - \cos x$ 2p

$\lim\limits_{x \to 0}\left(2^x - x^2 - \cos x\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(2^x + x^2 - \cos x\right) = 0$ 1p

Rezultă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ este continuă în $x = 0$ 1p

c) $\dfrac{2^x - x^2 - \cos x}{x} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2^x + x^2 - \cos x}{x}, (\forall) x > 0 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x)}{x} = \ln 2$ 1p

$\dfrac{2^x - x^2 - \cos x}{x} \geq \dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{2^x + x^2 - \cos x}{x}, (\forall) x < 0 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x)}{x} = \ln 2$ 1p

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^t = B \cdot B^t = I_3$. Să se demonstreze că cel puțin una dintre matricele $A+B$ sau $A-B$ este singulară (A^t este transpusa matricei A).

__Soluție:__

Presupunem că $A+B$ şi $A-B$ sunt nesingulare 1p

Avem $A^t = A^{-1}$ şi $B^t = B^{-1}$ 1p

Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avem $\det X = \det X^t$ 1p

$$\det(A \cdot B) \cdot \det(A+B) = \det(A \cdot B) \cdot \det\left(A^t + B^t\right) = \det(A \cdot B) \cdot \det\left(A^{-1} + B^{-1}\right) =$$

$$= \left(\det(A)\right) \cdot \det\left(A^{-1} + B^{-1}\right) \cdot \left(\det(B)\right) = \det\left(I_3 + A \cdot B^{-1}\right) \cdot \left(\det(B)\right) = \det(B+A) \Rightarrow \det(AB) = 1$$

.... 2p

Analog: $\det(A \cdot B) \cdot \det(A-B) = \left(\det(A)\right) \cdot \det\left(A^{-1} - B^{-1}\right) \cdot \left(\det(B)\right) =$

$= \det\left(I_3 - A \cdot B^{-1}\right) \cdot \left(\det(B)\right) = \det(B-A) = -\det(A-B) \Rightarrow \det(AB) = -1$ 1p

$\begin{cases} \det(A \cdot B) = 1 \\ \det(A \cdot B) = -1 \end{cases}$ - contradicție, rezultă cerința problemei 1p

4. Un călător parcurge dus – întors acelaşi traseu de lungime d în două zile, de fiecare dată în acelaşi interval de ora, 8^{00} – 12^{00}. În prima zi (la dus) o funcție continuă şi monotonă $f:[8,12] \to [0,d]$, exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, iar a doua zi (la întors) o altă funcție continuă şi monotonă $g:[8,12] \to [0,d]$, exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, în sens invers, până la fiecare moment orar $t \in [8,12]$. (în care fracțiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcția $F:[8,12] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(t) + g(t) - d$.

a) Calculați $F(8)$ şi $F(12)$.

b) Dacă $t_0 \in [8,12]$ şi $F(t_0) = 0$, demonstrați că la momentul t_0 călătorul se află în acelaşi loc pe traseu, atât la dus cât şi la întors.

c) Demonstrați că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors.

__Soluție:__

a) $F(8) = f(8) + g(8) - d = 0 + 0 - d = -d$ 1p

$F(12) = f(12) + g(12) - d = d + d - d = d$ 1p

b) La momentul t_0, $f(t_0) + g(t_0) - d = 0 \Rightarrow f(t_0) + g(t_0) = d$ 1p

ceea ce arată că poziția pe traseu a călătorului la momentul t_0 este aceeaşi şi la dus şi la întors 2p

c) $F(8) \cdot F(12) < 0$ şi cum F este continuă 1p

există $t_1 \in [8,12]$ astfel încât $F(t_1) = 0$, deci există un punct pe traseu în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Într-un mediu de cultură sunt, la momentul $t_0 = 0$, 300 bacterii. Numărul de bacterii la momentul $t > 0$ este dat de funcţia $n:[0,\infty)\to(0,\infty), n=n(t)$, funcţie care satisface relaţia $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t), (\forall)t\ge 0$.

a) Determinaţi $n(t)$.

b) Demonstraţi că pentru $t\ge 20$, numărul bacteriilor din mediu este mai mare decât 2015.

<u>Soluţie:</u>

a) Avem $n(t)>0, (\forall)t\ge 0$ şi $\frac{n'(t)}{n(t)}=\frac{1}{10}$ 1p

Deducem $\ln(n(t)):=\frac{1}{10}\cdot t+C$ 1p

Rezultă $n(t)=e^{\frac{t}{10}+C}, (\forall)t\ge 0$ 1p

Cu $n(0)=300 \Rightarrow e^C=300 \Rightarrow n(t)=300\cdot e^{\frac{t}{10}}, (\forall)t\ge 0$ 2p

b) Din $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t)>0 \Rightarrow n=n(t)$ este funcţie strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$ 1p

Pentru $t\ge 20$ avem $n(t)\ge n(20)=300\cdot e^2>300\cdot 2,7^2=2187>2015$ 1p

2. Se considera mulţimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{Z}_3) \mid X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$

a) Să se demonstreze că $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G, \quad \forall P,Q\in G$;

b) Să se rezolve ecuaţia $X^2=I_2, X\in G$;

c) Să se demonstreze ca produsul tuturor matricelor din *G*, diferite de O_2, nu depinde de ordinea lor şi să se calculeze acest produs.

<u>Soluţie:</u>

Daca $P=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}$ şi $Q=\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{d}\\ \hat{2}\hat{d} & \hat{c}\end{pmatrix}$, $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}\in\mathbb{Z}_3$, atunci $P+Q=\begin{pmatrix}\widehat{a+c} & \widehat{b+d}\\ \hat{2}\left(\widehat{b+d}\right) & \widehat{a+c}\end{pmatrix}\in G$ şi

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} \widehat{ac+2bd} & \widehat{bc+ad} \\ \hat{2}\left(\widehat{bc+ad}\right) & \widehat{ac+2bd} \end{pmatrix} \in G$$ 2p

Dacă $X = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$, atunci avem $\begin{pmatrix} \widehat{a^2+2b^2} & \widehat{2ab} \\ \widehat{ab} & \widehat{a^2+2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, de unde $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$ şi $\hat{a}^2 + \hat{2}\hat{b}^2 = \hat{1}$

.... 1p

Ecuația are doua soluții: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ 1p

Toate matricele din G, diferite de O_2, sunt inversabile in G 1p

Produsul nu depinde de ordinea matricelor deoarece conform a) orice doua matrice din G comuta

.... 1p

Produsul este egal cu $\hat{2}I_2$ 1p

3. Se considera polinomul: $f_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \ldots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!} \in \mathbb{C}[X], n \in \mathbb{N}$ şi matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ cu $A^4 = O_3$.

a) Să se demonstreze că $f_n = \frac{1}{n!}(X+1)\cdot(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_3 - x \cdot A) = 1, \forall x \in \mathbb{C}$,

c) Să se calculeze $\det(f_3(A))$,

<u>Soluție:</u>

a) Se foloseşte inducția matematica 2p

sau

se grupează din aproape în aproape

$$f_n = \underbrace{\frac{1+x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!}} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} =$$

$$= \underbrace{\frac{(x+1)(x+2)}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!}} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{3!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} = \ldots = \frac{1}{n!}(x+1)(x+2)\ldots(x+n), (\forall) n \in \mathbb{N}$$

b) Deoarece I_3 comuta cu A avem: $(I_3 - x \cdot A)(I_3 + xA + x^2A^2 + x^3A^3) = I_3^4 - x^4A^4 = I_3$, de unde avem $\det(I_3 - x \cdot A) \neq 0, \forall x \in \mathbb{C}$ 1p

Deducem că funcția $g(x) = \det(I_3 - x \cdot A)$ este constantă, $\forall x \in \mathbb{C}$, deci

$g(x) = g(0) = \det(I_3) = 1$ 1p

c) Avem $f_3(X) = (1+X)\left(1 + \frac{1}{2}X\right)\left(1 + \frac{1}{3}X\right)$ 1p

$f_3(A) = (I_3 + A)\left(I_3 + \frac{1}{2}A\right)\left(I_3 + \frac{1}{3}A\right) \Rightarrow \det(f_3(A)) = g(-1)\, g\left(-\frac{1}{2}\right) g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$ 2p

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\ln x$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui f.

b) Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

c) Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,\ln 2],\ f(x)=\ln(1+tgx)$. Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

Soluție:

a) F primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow 2ax\ln x+ax+2bx=x\ln x,\ (\forall)x\in(0,\infty)$ 2p

$$\begin{cases}2a=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$$ 1p

b) $\mathcal{A}=\int_1^e x\cdot\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1+e^2}{4}$ 1p

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)\,dx$

Schimbăm variabila prin $x=\frac{\pi}{4}-t,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to t\in\left[\frac{\pi}{4},0\right];\ dx=-dt$

$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\left[1+tg\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-tgt}{1+tgt}\right]dt$ 2p

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+tgt}\right)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2$ 1p