INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil Filologie / Ştiințe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx+m^2,\ m\in\mathbb{R}$, fixat.

a) Demonstrați că $f(x)\geq\frac{3m^2}{4},\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care vârful corespunzător parabolei asociate acestei funcții are coordonate egale.

2. În trapezul $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, fie M mijlocul segmentului $[CD]$ şi N mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Deduceți că $(MN)\parallel(BC)$.

c) Demonstrați că $MN=\frac{1}{2}\cdot(AD+BC)$.

3. Un turist se deplasează pe un aeroport utilizând o bandă rulantă de 300 metri lungime care are viteza de mişcare 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Notăm cu *A*, respectiv *B* extremitățile benzii rulante. (*A*, extremitatea inițială şi *B* extremitate finală). Turistul vrea să stabilească următoarea performanță: să parcurgă traseul de la *A* la *B* şi înapoi la *B*, fără oprire, cu o viteză constantă. Ştiind că acest drum este parcurs în 10 minute şi 48 de secunde, să se determine viteza turistului.

4. O firmă doreşte să-şi dubleze în doi ani producția pentru un anumit produs. Cu câte procente trebuie să crească producția în fiecare an pentru a atinge acest obiectiv ? $\left(\sqrt{2}\simeq 1,4142\right)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil Filologie / Ştiințe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, astfel încât:

a) $f(1)=2015$;

b) $f(m+n)=f(n)\cdot f(m), (\forall) n,m\in\mathbb{N}^*$.

2. Se dă funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{15-x}(x+5)$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție al funcției *f*.

b) Rezolvați ecuația $f(x)=2$.

c) Calculați aria triunghiului format de origine şi punctele de intersecție ale graficului funcției *f* cu axele de coordonate.

3. Se consideră dreptele: $(d_1): x+y=0, (d_2): y=4x-10$ şi punctul $A(0,5)$. Calculați perimetrul şi aria paralelogramului care are un vârf în punctul *A*, iar (d_1) şi (d_2) sunt drepte suport pentru două dintre laturile paralelogramului.

4. Pentru buna desfăşurare a olimpiadei de matematică aplicată au fost alocate 7 cabinete şi 7 chei distincte, fără a se preciza cheia corespunzătoare pentru nici unul dintre cabinete. Care este numărul maxim de încercări ce trebuie făcute pentru a stabili care cheie corespunde fiecărui cabinet ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Zece prieteni au de realizat un proiect. Pentru a stabili telefonic detaliile proiectului, fiecare trebuie să comunice, obligatoriu, cu fiecare din grup, o dată şi numai o dată. Câte convorbiri telefonice au loc?

2. La un PetShop sunt 20 de pisici cu ochii albaştri sau verzi şi cu blana cu firul scurt sau lung. Se ştie că 30% dintre pisici nu au ochii albaştri, iar 60% dintre pisici au blana cu firul scurt. Dintre pisicile cu părul scurt, 50% au ochii albaştri.
a) Există pisici cu ochii verzi şi blana cu firul scurt?
b) Aflați câte pisici au ochii albaştri şi blana cu firul lung.

3. Fie seria statistică:

Vârsta x	$7\leq x < 14$	$14\leq x < 24$	$24\leq x < 34$	$34\leq x < 44$	$44\leq x < 54$	$54\leq x < 80$
Efective	5	17	21	20	17	20
Frecvențe cumulate crescător						

a) Completați, în procente, tabelul la rubrica frecvențe cumulate crescător.
b) Construiți poligonul frecvențelor cumulate crescător, care are vârfurile $M_1, M_2, \ldots, M_6$, unde abscisa reprezintă vârsta, iar ordonata reprezintă frecvența cumulată crescător.
c) Stabiliți clasa mediană şi calculați mediana seriei.

4. Fie K_n un graf complet neorientat (orice două noduri sunt unite printr-o muchie) cu n noduri.
a) Pentru n=4 construiți (**separat**) imaginea pentru fiecare circuit hamiltonian (drum care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată, cu excepția extremităților care coincid) din K_4.
b) Calculați câte circuite hamiltoniene distincte există într-un graf K_n complet neorientat cu n noduri.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Demonstrați că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A + B \in \mathcal{M}$ şi $A \cdot B \in \mathcal{M}$

b) Determinați matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu proprietatea ca $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

c) Determinați matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ astfel încât: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

2. Pe mulțimea $G = (1, \infty)$ se defineşte legea de compoziție $* : G \to G$, dată de $x * y = xy - x - y + 2$, $(\forall)\, x, y \in G$

a) Să se demonstreze ca legea este asociativa

b) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii G in raport cu legea $*$

c) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{2015 \text{ ori}} = 2$

3. Un stadion are o capacitate de 900 locuri. La un spectacol s-au vândut toate biletele. Un bilet pentru copii costa 20 lei, pentru elevi 30 lei şi pentru adulți 40 lei. Se ştie că numărul adulților a fost jumătate din numărul copiilor şi elevilor la un loc, iar la spectacol s-au încasat 27000 lei. Determinați numărul de spectatorilor din fiecare categorie.

4. O picătura de apa ia forma unui patrulater *ABCD* cu *A*(2, 3), *B*(6, 2), *C*(-3, -3), *D*(-5, 1). Aflați aria acesteia. Daca picătura ar lua forma unui pătrat, cu aceeaşi arie, cat ar fi latura pătratului ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

x

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+m^2, m\in\mathbb{R}$, fixat.

a) Demonstrați că $f(x)\ge\frac{3m^2}{4}, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care vârful corespunzător parabolei asociate acestei funcții are coordonate egale.

<u>Soluție:</u>

a) $f(x)\ge\frac{3m^2}{4}\Leftrightarrow x^2+mx+\frac{m^2}{4}\ge 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{m}{2}\right)^2\ge 0$, adevărat $(\forall)x\in\mathbb{R}$. 3p

b) Vârful parabolei asociate este $V\left(-\frac{m}{2},\frac{3m^2}{4}\right)$ 2p

Din $-\frac{m}{2}=\frac{3m^2}{4}\Rightarrow\begin{cases}m_1=0\\ m_2=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 2p

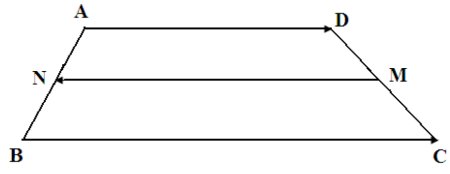
2. În trapezul $ABCD$ $(AD\parallel BC)$, fie M mijlocul segmentului $[CD]$ şi N mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Deduceți că $(MN)\parallel(BC)$.

c) Demonstrați că $MN=\frac{1}{2}\cdot(AD+BC)$.

<u>Soluție:</u>



a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ 1p

Adunând, membru cu membru, egalitățile de mai sus obținem: $2\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$ 2p

b) $AD \parallel BC \Rightarrow (\exists) t > 0$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{MN} = -\dfrac{t+1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$, paraleli $\Rightarrow (MN) \parallel (BC)$ 1p

c) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|-\dfrac{t+1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{t+1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{t \cdot BC + BC}{2} = \dfrac{AD + BC}{2}$ 1p

3. Un turist se deplasează pe un aeroport utilizând o bandă rulantă de 300 metri lungime care are viteza de mişcare 4 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Notăm cu *A*, respectiv *B* extremităţile benzii rulante. (*A*, extremitatea iniţială şi *B* extremitate finală). Turistul vrea să stabilească următoarea performanţă: să parcurgă traseul de la *A* la *B* şi înapoi la *B*, fără oprire, cu o viteză constantă. Ştiind că acest drum este parcurs în 10 minute şi 48 de secunde, să se determine viteza turistului.

<u>Soluţie:</u>

Fie *v*, viteza în $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ a turistului.

Lungimea benzii este de *L* = 0,3 km.

De la *A* la *B*, turistul are viteza $v_A = v + 4$ 1p

Timpul necesar parcurgerii distanţei [*AB*] este $t_1 = \dfrac{0,3}{v+4}$ 1p

De la *B* la *A*, turistul are viteza $v_B = v - 4$ 1p

Timpul necesar parcurgerii distanţei [*BA*] este $t_2 = \dfrac{0,3}{v-4}$ 1p

Timpul total necesar parcurgerii distanţei $A \to B \to A$ este *t* = 10 minute şi 48 secunde =

$= \dfrac{10}{60}$ ore $+ \dfrac{48}{3600}$ ore $= 0,18\text{h}$ 1p

$t_1 + t_2 = 0,18 \Rightarrow \dfrac{0,3}{v+4} + \dfrac{0,3}{v-4} = 0,18 \Rightarrow 3v^2 - 10v - 48 = 0 \Rightarrow v_1 = -\dfrac{8}{3}$ (nu convine) ;

$v_2 = 6\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ (viteza turistului) 2p

4. O firmă doreşte să-şi dubleze în doi ani producţia pentru un anumit produs. Cu câte procente trebuie să crească producţia în fiecare an pentru a atinge acest obiectiv ? $\left(\sqrt{2} \simeq 1,4142\right)$.

<u>Soluţie:</u>

Fie *P*, producţia anuală obţinută de firmă până în momentul primei creşteri de *t*% 1p

La sfârşitul primului an producţia obţinută este $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \cdot P$ 1p

La sfârşitul anului al doilea producţia obţinută este $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 \cdot P$ 1p

Din enunţ rezultă că $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 \cdot P = 2P$ 1p

$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 = 2 \Rightarrow 1 + \dfrac{t}{100} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = 100 \cdot \left(-1 \pm \sqrt{2}\right) \Rightarrow t_1 = -241,42$ (nu convine),

$t_2 = 41,42$ (soluţie) 2p

Aşadar în fiecare an producţia trebuie să crească cu 41,42% 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, astfel încât:

a) $f(1)=2015$;

b) $f(m+n)=f(n)\cdot f(m), (\forall)n,m\in\mathbb{N}^*$

<u>Soluție:</u>

Din b), pentru m = 1, avem $f(n+1)=2015\cdot f(n), (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ 2p

$f(1)=2015 \Rightarrow f(2)=2015\cdot f(1)=2015^2$ 1p

Presupunem că $f(n)=2015^n$ 1p

Din $f(n+1)=2015\cdot f(n) \Rightarrow f(n+1)=2015^{n+1}$ 2p

Conform inducției matematice rezultă că $f(n)=2015^n, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ 1p

2. Se dă funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{15-x}(x+5)$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție al funcției *f*.

b) Rezolvați ecuația $f(x)=2$.

c) Calculați aria triunghiului format de origine şi punctele de intersecție ale graficului funcției *f* cu axele de coordonate.

<u>Soluție:</u>

a) Condițiile de existență: $\begin{cases}15-x>0\\ 15-x\neq 1\\ x+5>0\end{cases}$ 1p

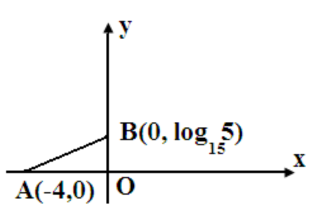
Obține $x\in(-5,15)\setminus\{14\} \Rightarrow D=(-5,15)\setminus\{14\}$ 1p

b) $f(x)=2 \Rightarrow \log_{15-x}(x+5)=2 \Rightarrow x+5=(15-x)^2$ 1p

Rezultă că $x^2-31x+220=0 \Rightarrow x_1=20\notin D$ (nu convine) şi $x_2=11\in D$ (soluție) 1p

c) $G_f\cap(Ox) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x+5=1 \Rightarrow x=-4\in D \Rightarrow A(-4,0)$ 1p

$G_f\cap(Oy) \Rightarrow f(0)=\log_{15}5>0 \Rightarrow B(0,\log_{15}5)$ 1p



$\mathcal{A}_{\Delta AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=2\log_{15}5$ 1p

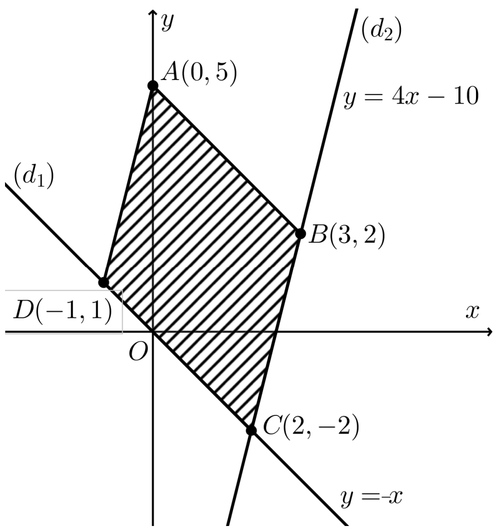
3. Se consideră dreptele: $(d_1): x + y = 0, (d_2): y = 4x - 10$ şi punctul $A(0,5)$. Calculaţi perimetrul şi aria paralelogramului care are un vârf în punctul A, iar (d_1) şi (d_2) sunt drepte suport pentru două dintre laturile paralelogramului.

Soluţie:

$A(0,5) \notin (d_1)$ şi $A(0,5) \notin (d_2) \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{C\}$, unde C este vârful opus vârfului A 1p

$(d_1) \cap (d_2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 4x - 10 \end{cases} \Rightarrow C(2,-2)$ 1p

Figură corectă 1p



$(AB) \parallel (d_1) \Rightarrow (AB): x + y = 5,$

$(AB) \cap (d_2) \Rightarrow B(3,2)$ 1p

$(AD) \parallel (d_2) \Rightarrow (AD): y = 4x + 5$

$(AD) \cap (d_1) \Rightarrow D(-1,1)$ 1p

$AB = 3\sqrt{2}; AD = \sqrt{17} \Rightarrow$

$\mathcal{P} = 2 \cdot AB + 2 \cdot AD = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$ 1p

$h_A = d(A,(d_1)) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$

$\mathcal{A}_P = AB \cdot h_A = 15$ 1p

4. Pentru buna desfăşurare a olimpiadei de matematică aplicată au fost alocate 7 cabinete şi 7 chei distincte, fără a se preciza cheia corespunzătoare pentru nici unul dintre cabinete. Care este numărul maxim de încercări ce trebuie făcute pentru a stabili care cheie corespunde fiecărui cabinet ?

Soluţie:

Pentru primul cabinet se încearcă cel mult 6 chei (dacă primele 6 chei nu corespund, a şaptea este cea bună şi se lasă în yală) 2p

Pentru al doilea cabinet se încearcă cel mult 5 chei, pentru al treilea cabinet cel mult 4 chei, etc.
.... 2p

Pentru al şaselea cabinet se încearcă cel mult o cheie din cele 2 rămase, iar pentru al şaptelea cabinet este cheia rămasă (deci nici o încercare) 2p

Numărul maxim de încercări este 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 .... 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

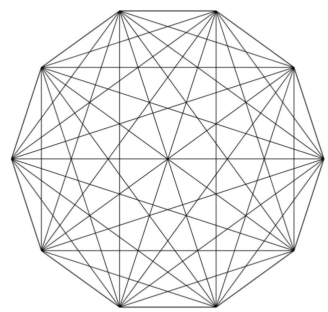
Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Zece prieteni au de realizat un proiect. Pentru a stabili telefonic detaliile proiectului, fiecare trebuie să comunice, obligatoriu, cu fiecare din grup, o dată şi numai o dată. Câte convorbiri telefonice au loc?

Soluție:

Construim graful asociat problemei.
Se observă că este un graf complet cu 10 noduri,
iar fiecare convorbire reprezintă o muchie a grafului.
.... 2 p



Aşadar, vor fi tot atâtea convorbiri, câte muchii are graful complet cu 10 noduri
(9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1), deci 45.. 5 p

2. La un PetShop sunt 20 de pisici cu ochii albaştri sau verzi şi cu blana cu firul scurt sau lung. Se ştie că 30% dintre pisici nu au ochii albaştri, iar 60% dintre pisici au blana cu firul scurt. Dintre pisicile cu părul scurt, 50% au ochii albaştri.
a) Există pisici cu ochii verzi şi blana cu firul scurt?
b) Aflați câte pisici au ochii albaştri şi blana cu firul lung.

Soluție:

30% din 20 = 6 pisici au ochii verzi... 1 p
20 – 6 = 14 pisici au ochii albaştri.. 1 p
60% din 20 = 12 pisici au blana cu firul scut.. 1 p
50% din 12 = 6 pisici au ocii albaştri şi blana cu firul scurt... 1 p
12 – 6 = 6 pisici au ochii verzi şi blana cu firul scurt.. 1 p
6 – 6 = 0 pisici au ochii verzi şi blana cu firul lung .... 1 p
14 – 6 = 8 pisici au ochii albaştri şi blana cu firul lung... 1 p

3. Fie seria statistică:

Vârsta x	$7\leq x<14$	$14\leq x<24$	$24\leq x<34$	$34\leq x<44$	$44\leq x<54$	$54\leq x<80$
Efective	5	17	21	20	17	20
Frecvențe cumulate crescător						

a) Completați, în procente, tabelul la rubrica frecvențe cumulate crescător.

b) Construiți poligonul frecvențelor cumulate crescător, care are vârfurile $M_1, M_2, ..., M_6$, unde abscisa reprezintă vârsta, iar ordonata reprezintă frecvența cumulată crescător.

c) Stabiliți clasa mediană şi calculați mediana seriei.

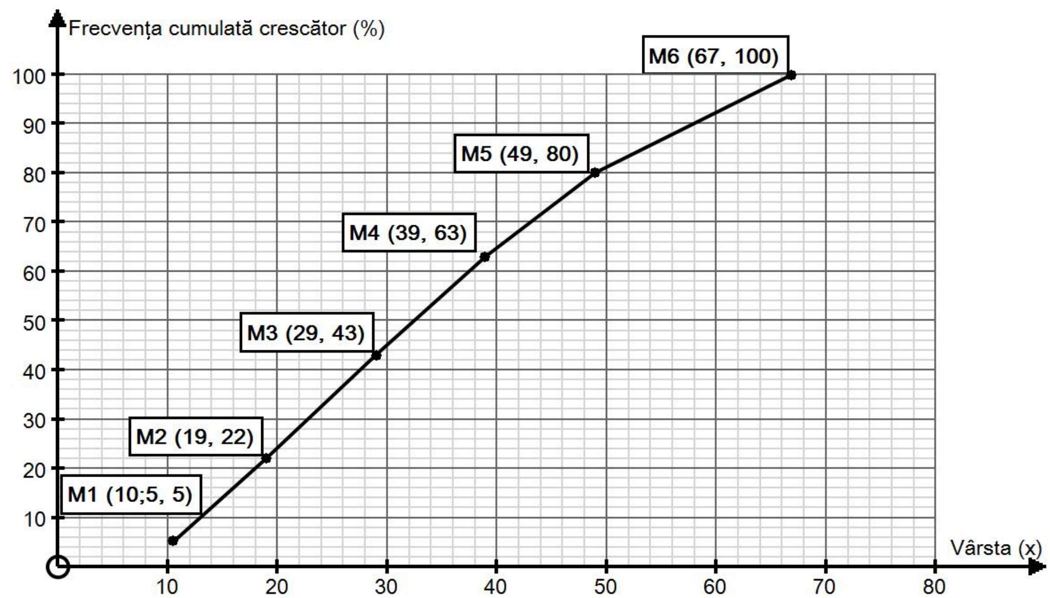
Soluție:

a) ....1 p

Vârsta x	$7 \leq x < 14$	$14 \leq x < 24$	$24 \leq x < 34$	$34 \leq x < 44$	$44 \leq x < 54$	$54 \leq x < 80$
Efective	5	17	21	20	17	20
Frecvențe cumulate crescător	5%	22%	43%	63%	80%	100%

b) Seria statistică având caracteristica de tip continuu (vârsta), punctele $M_i\left(i=\overline{1,6}\right)$ vor avea drept abscisă media clasei corespunzătoare, iar drept ordonată frecvența absolută cumulată crescător 1p

Obținem $M_1(10,5;5); M_2(19;22); M_3(29;43); M_4(39;63); M_5(49;80); M_6(67;100)$ 1p



.... 1p

c) Clasa mediană este [34,44), ... 1p

Mediana cu variabila cantitativă de tip continuu este $M_e = L + \frac{C_M - N_{i-1}}{n_i} \cdot k$, unde L este limita inferioară a clasei mediane; C_M este cota medianei, $C_M = \begin{cases} \frac{N}{2}, \text{ dacă } N \text{ este par} \\ \frac{N+1}{2}, \text{ dacă } N \text{ este impar} \end{cases}$; N_{i-1} este frecvența absolută cumulată crescător până la clasa mediană, n_i este frecvența absolută corespunzătoare clasei mediane, iar k este amplitudinea clasei medianei $\left(x_{i+1} - x_i\right)$ 1p

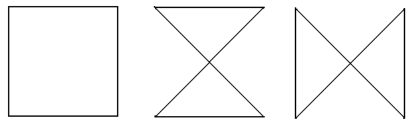
$N = 100; C_M = \frac{N}{2} = 50; M_e = 34 + \frac{50-43}{20} \cdot 10 = 37,5$ 1p

4. Fie K_n un graf complet neorientat (orice două noduri sunt unite printr-o muchie) cu n noduri.
a) Pentru n=4 construiți (**separat**) imaginea pentru fiecare circuit hamiltonian (drum care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată, cu excepția extremităților care coincid) din K_4.
b) Calculați câte circuite hamiltoniene distincte există într-un graf K_n complet neorientat cu n noduri.

<u>Soluție:</u>

Subiectul IV

a) Într-un graf complet cu 4 noduri neorientat sunt 3 circuite hamiltoniene:



.... 2 p

b) Algoritmul de calcul al numărului de circuite hamiltoniene distincte dintr-un graf K_n complet neorientat cu n noduri este următorul:
Pasul 1. Se observă că într-un graf complet orientat cu n noduri, numărul circuitelor hamiltoniene este n! (cele n noduri se pot parcurge în P_n moduri distincte) .... 2 p
Paul 2. Se observă că într-un graf complet neorientat cu n noduri, coincid acele circuite hamiltoniene care au aceeaşi configurație, iar ordinea nodurilor este fie în sens trigonometric, fie în sens invers trigonometric (de exemplu, 1-2-3-4-1 coincide cu 1-4-3-2-1), deci numărul circuitelor hamiltoniene se reduce la jumătate, devenind n!/2 .... 1 p
Pasul 3. Se observă că într-un graf complet neorientat cu n noduri, coincid acele circuite hamiltoniene care au aceeaşi configurație, iar ordinea nodurilor este păstrată, alegându-se ca extremitate a ciclului, oricare dintre nodurile circuitului (de exemplu, 1-2-3-4-1 coincide cu 2-3-4-1-2; 3-4-1-2-3; 4-3-2-1-4), deci numărul circuitelor hamiltoniene se micşorează de n ori, devenind (n-1)!/2 .... 2 p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Demonstraţi că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A + B \in \mathcal{M}$ şi $A \cdot B \in \mathcal{M}$

b) Determinaţi matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu proprietatea ca $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

c) Determinaţi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ astfel încât: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

<u>Soluţie:</u>

a) $A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ 1p

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ 2p

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow$ $a = 1, b = -2$ 2p

c) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix};$ ... $; A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ (inducţie matematică) 1p

Daca n este număr par, atunci $a = 1$, $b = \frac{2}{n}$ sau $a = -1$, $b = -\frac{2}{n}$ iar daca n este impar atunci $a = 1$ şi $b = \frac{2}{n}$ 1p

2. Pe mulţimea $G = (1, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie $*: G \to G$, dată de $x * y = xy - x - y + 2$, $(\forall) x, y \in G$

a) Să se demonstreze ca legea este asociativa

b) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii G in raport cu legea $*$

c) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x * x * x * ... * x}_{2015 \text{ ori}} = 2$

<u>Soluţie:</u>

a) $(x * y) * z = x * (y * z) = xyz - xy - yz - xz + x + y + z, (\forall) x, y, z \in G$ 2p

b) $x * e = e * x = x \Rightarrow e(x-1) = 2(x-1), (\forall) x \in G \Rightarrow e = 2 \in (1, \infty)$ 1p

$x * x' = 2 \Rightarrow xx' - x - x' = 0 \Rightarrow \ x' = \dfrac{x}{x-1} \in (1, \infty)$ 2p

c) $x * y = (x-1)(y-1)+1 \Rightarrow x * x = (x-1)^2 + 1$

$\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{2015 \text{ ori}} = (x-1)^{2015} + 1 = 2 \Rightarrow (x-1)^{2015} = 1 \Rightarrow x = 2$ 2p

3. Un stadion are o capacitate de 900 locuri. La un spectacol s-au vândut toate biletele. Un bilet pentru copii costa 20 lei, pentru elevi 30 lei şi pentru adulți 40 lei. Se ştie că numărul adulților a fost jumătate din numărul copiilor şi elevilor la un loc, iar la spectacol s-au încasat 27000 lei. Determinați numărul de spectatorilor din fiecare categorie.

Soluție:

Fie x, numărul copiilor, y numărul elevilor şi z numărul adulților 1p

Avem:

$$\begin{cases} x+y+z=900 \\ 20x+30y+40z=27000 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=900 \\ 2x+3y+4z=2700 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$ 1p

Cu regula lui Cramer avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$ 1p

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 900 & 1 & 1 \\ 2700 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

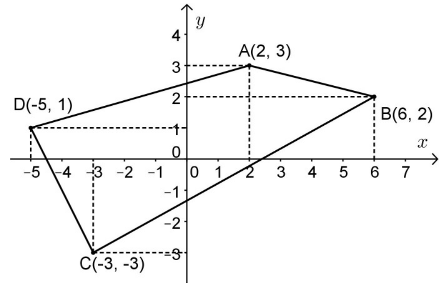
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 900 & 1 \\ 2 & 2700 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 900 \\ 2 & 3 & 2700 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 300;\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 300;\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 300$ 1p

4. O picătura de apa ia forma unui patrulater $ABCD$ cu $A(2, 3)$, $B(6, 2)$, $C(-3, -3)$, $D(-5, 1)$. Aflați aria acesteia. Daca picătura ar lua forma unui pătrat, cu aceeaşi arie, cat ar fi latura pătratului ?

Soluție:



$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BCD}$ 1p

$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}$ 2p

$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 23$ 2p

$\frac{15}{2} + 23 = \frac{61}{2}$ =30,5 .... 1p

L= $\sqrt{30,5} \simeq 5,52268$ 1p

(*Orice alta metoda corecta folosita pentru aflarea ariei* .... *7p*)