

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

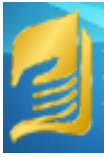


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a^2 - a + 1)x + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că $a^2 - a + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$
 - Demonstrați că $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.
 - Comparați numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ și $f(\sqrt{2} + 2)$.
- Fie pătratul $ABCD$ de latura 4, în care $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul segmentului $[BO]$.
Considerăm punctul N astfel încât $\overline{CN} = \overline{DO}$.
 - Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO} = 2 \cdot \overline{AM}$.
 - Determinați lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.
 - Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.
- Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1 \neq 0$.
 - Demonstrați că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$.
 - Verificați relația $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \forall n \geq 1$.
 - Demonstrați că $S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1$.
- Demonstrați că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \geq 1$
 - La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori, etc. După câte minute stadionul se va umple?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

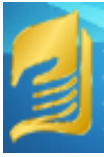
a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + \dots + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai și 10 gogoși, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai și 7 gogoși, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai și o gogoasă ?

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Știind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

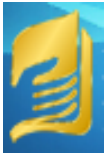


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A \cdot A^T - x \cdot I_2)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A .
- a) Demonstrați că $f(0) \geq 0$.
- b) Găsiți $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
- c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(-n) + f(-n+1) + \dots + f(n-1) + f(n) - 2n - 1}{n^3} \right)$
2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0, 1, 2\}$, se numește **echilibrată** dacă oricare două elemente aflate pe aceeași linie și aceeași coloană sunt numere consecutive.
- De exemplu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este matrice **echilibrată**.
- a) Justificați că matricea I_2 este matrice **echilibrată**.
- b) Câte matrice **echilibrate** se pot construi ?
- c) Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice **echilibrată**.
3. a) Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{x + q}$, $m, n, p, q \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.
- Să se determine $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită asimptotele $x = 2$ și $y = 3x - 1$, iar $A(1, 3)$ să fie punct al graficului.
- b) Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x) - \sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- Calculați $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.
4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- a) Demonstrați că $A^4 = B^3$.
- b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX + XB = I_2$.
- c) Verificați egalitatea $AB + C + I_2 = O_2$, unde $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și apoi demonstrați că $(AB)^n \neq I_2$, $(\forall) n \geq 1$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

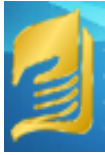


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru e . Demonstrați că :
 - a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a, b \in G$.
 - b) Dacă $a, b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ și $a ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:
 - a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx$.
3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$
 - a) Calculați X^2, X^3 .
 - b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.
 - c) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.
 - d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.
4. Se consideră integrala nedefinită $I(x, n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx$, unde $x \in (0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculați $I(x, 0)$.
 - b) Calculați $I(x, 1)$.
 - c) Calculați $I(x, n)$, pentru $n \geq 2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Se dă mulțimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

a) Demonstrați identitatea $(a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2$, oricare ar fi numerele reale a, b, c, d .

b) Dacă $u, v \in M$, să se demonstreze că și $u \cdot v \in M$.

c) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $7^n \in M, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	Se demonstrează identitatea prin calcul direct	3 p.
b).	Alege $u = a^2 - 2b^2$ și $v = c^2 - 2d^2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$	1 p.
	Din identitatea de la punctul precedent, rezultă că $u \cdot v \in M$	1 p.
c).	Pentru $a = 3$ și $b = 1$ (sau $a = 5$ și $b = 3$) sau orice alt exemplu deducem că $7 \in M$.	1 p.
	Dacă $7^n \in M \Rightarrow 7^{n+1} = 7 \cdot 7^n \in M$ (conform cu b).)	1 p.

2. O bucată de sârmă având lungimea de 15 m se taie în două bucăți de lungimi diferite și, din fiecare parte se construiește câte un pătrat. Să se determine lungimile celor două bucăți, știind că pătratul obținut prin „îndoirea” părții mai mari are aria de patru ori mai mare decât aria pătratului obținut prin „îndoirea” părții mai mici.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
	Fie x respectiv $(15 - x)$ lungimile celor două părți	1 p.
	Conform enunțului trebuie să avem: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{15-x}{4}\right)^2 \Rightarrow 3x^2 - 120x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 40x + 300 = 0$	3 p.
	Obținem: $x_1 = 30$ (nu convine) și $x_2 = 10$ SAU $x^2 = 4 \cdot (15 - x)^2 \Rightarrow x = 2 15 - x $ Același rezultat îl obținem din egalitatea: $\left(\frac{15-x}{4}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2$	2 p.
	Așadar bucata mai mare are 10m, iar cea mică are 5m.	1 p.

3. O mulțime de patru numere naturale se numește **deosebită** dacă admite exact două submulțimi cu câte trei elemente aflate în progresie aritmetică. De exemplu mulțimea $\{10,11,12,14\}$ este **deosebită** deoarece admite submulțimile $\{10,11,12\}$, $\{10,12,14\}$ având elementele în progresie aritmetică. Dacă $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, să se determine :

a) Numărul mulțimilor **deosebite**, cu câte patru elementele, de forma $\{2, 3, \dots, \dots\}$, având elementele din A.

b) Numărul total al mulțimilor **deosebite** cu elemente din A (evident cu câte patru elemente).

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	Mulțimile deosebite au una dintre formele $\{a, a+r, a+2r, a+3r\}$ sau $\{a, a+r, a+2r, a+4r\}$ Mulțimile deosebite ce conțin pe 2 și 3 și au elemente din A sunt: $\{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 5\}; \{2, 3, 4, 5\}$ și $\{2, 3, 4, 6\}$. Așadar sunt 4 astfel de mulțimi.	3 p.
b).	Mulțimi de forma: $\{a, a+r, a+2r, a+3r\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pentru } r=1 \text{ sunt șapte mulțimi: } \{1, 2, 3, 4\}; \{2, 3, 4, 5\}; \dots \dots \{7, 8, 9, 10\} \\ \text{Pentru } r=2 \text{ sunt patru mulțimi: } \{1, 3, 5, 7\}; \{2, 4, 6, 8\}; \{3, 5, 7, 9\}; \{4, 6, 8, 10\} \\ \text{Pentru } r=3 \text{ avem o singură mulțime: } \{1, 4, 7, 10\} \end{array} \right.$ În acest caz avem 12 mulțimi.	2 p.
	Mulțimi de forma: $\{a, a+r, a+2r, a+4r\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pentru } r=1 \text{ sunt șase mulțimi: } \{1, 2, 3, 5\}; \{2, 3, 4, 6\}; \dots \dots \{6, 7, 8, 10\} \\ \text{Pentru } r=2 \text{ sunt două mulțimi: } \{1, 3, 5, 9\}; \{2, 4, 6, 10\} \end{array} \right.$ În acest caz avem 8 mulțimi.	1 p.
	În total avem 20 de mulțimi „deosebite”	1 p.

4. Se consideră triunghiul ABC și punctele $N \in [BC]$, $M \in [AC]$ astfel încât

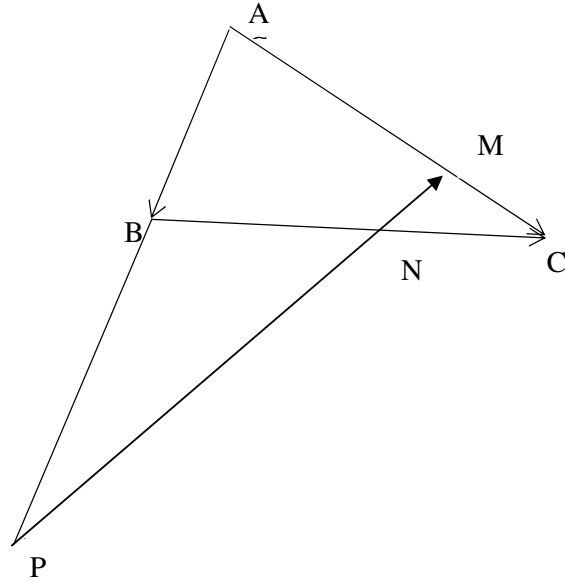
$$\frac{CM}{AM} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{2}.$$

a) Să se demonstreze că $\overline{NM} = \frac{1}{6} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.

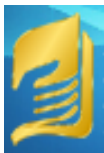
b) Dacă $NM \cap AB = \{P\}$ și $\frac{AB}{PB} = k$, să se demonstreze că $\overline{NP} = \frac{k+2}{2k} \cdot \overline{AB} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$.

c) Determinați $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{NP} = t \cdot \overline{NM}$ și găsiți valoarea raportului $\frac{AB}{PB}$.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte



	$\vec{AB} + \vec{BN} + \vec{NM} + \vec{MA} = \vec{0}$	1 p.
a).	$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}; \vec{BN} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}); \vec{MA} = -\frac{2}{3} \vec{AC}$	1 p.
	$\vec{NM} = \frac{1}{6} \cdot \vec{AC} - \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$	1 p.
b).	$\vec{MP} + \vec{PA} + \vec{AM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{MN} + \vec{NP} - \frac{1}{k} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC} = \vec{0}$	1 p.
	Obține: $\vec{NP} = \frac{k+2}{2k} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{2} \cdot \vec{AC}$	1 p.
c).	Din $\vec{NP} = t \cdot \vec{NM} \Rightarrow t = -3$ și $k = 1 \Rightarrow \frac{AB}{PB} = 1$.	2 p.
Metodă alternativă (pentru punctul c.)		
c).	În triunghiul ABC cu transversala \overline{MNP} aplicăm teorema lui MENELAUS Avem: $\frac{NB}{NC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$	1 p.
	Cum: $\frac{NB}{NC} = 1$ și $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PB} = 2 \Rightarrow \frac{PA+AB}{PB} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{PB} = 1$	1 p.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. a) Demonstrați că: $\log_2^2(x^3) = 9 \log_2^2(x)$, $(\forall) x > 0$.
b) Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{3 \cdot \log_2^2(x^3)} + 3 \cdot \sqrt[3]{\log_2(x)} - 6 = 0$, $x > 0$.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$\log_2^2 x^3 = (\log_2 x^3)^2 = (3 \cdot \log_2 x)^2 = 9 \cdot \log_2^2 x$	2 p.
	Ecuția devine: $\sqrt[3]{\log_2^2 x} + \sqrt[3]{\log_2 x} - 2 = 0$	1 p.
	Notăm $\sqrt[3]{\log_2 x} = t$	1 p.
b).	Obținem: $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -2$	1 p.
	$\sqrt[3]{\log_2 x} = 1 \Rightarrow x_1 = 2$	1 p.
	$\sqrt[3]{\log_2 x} = -2 \Rightarrow x_2 = 2^{-8}$	1 p.

2. a) Demonstrați că $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$. Stabiliți când are loc egalitatea.
b) Rezolvați ecuația: $4^x + 9^x + 2 = 2 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.
c) Rezolvați ecuația: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ (adevărat)	1 p.
	Egalitatea are loc pentru $a = b = 1$	1 p.
	Notăm $2^x = a$ și $3^x = b$	1 p.
b).	Ecuția devine: $(2^x - 1)^2 + (3^x - 1)^2 = 0$	1 p.
	Rezultă $2^x = 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$	1 p.
	$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$	1 p.
c).	Notăm $\log_3 x = y$ și ecuația devine $y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$	1 p.

3. Se consideră numerele complexe: $z_1 = a + ib, a, b \in \mathbb{R}; z_2 = 1 + 2i$ și $z_3 = -2 + i$.

a) Calculați: $|z_2 - z_3|$.

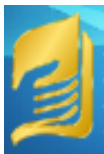
b) Să se determine toate perechile de numere întregi (a, b) astfel încât $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.

c) Dacă $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ demonstrați că $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	$ z_2 - z_3 = 3 + i = \sqrt{10}$	1 p.
b).	$ z_1 - z_2 = a - 1 + (b - 2)i = \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{5}$	1 p.
	Putem avea cazurile: $(a - 1)^2 = 1$ și $(b - 2)^2 = 4$	1 p.
	sau $(a - 1)^2 = 4$ și $(b - 2)^2 = 1$	1 p.
	Obținem: $(a, b) \in \{(0, 0); (2, 0); (0, 4); (2, 4); (-1, 1); (-1, 3); (3, 1); (3, 3)\}$	1 p.
c).	$ z_1 - z_2 = z_1 + z_2 \Rightarrow (2a - b)^2 = 0 \Rightarrow b = 2a$	1 p.
	$z_1 = a + ib = a + 2ia = a \cdot (1 + 2i) = a \cdot z_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = a \in \mathbb{R}$	1 p.

4. În trei magazine se vinde același produs. În primul magazin se vând m bucăți cu p lei/bucată. În al doilea magazine se vând cu n bucăți mai mult decât în primul magazin la prețul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu n bucăți mai puțin decât în primul magazine la prețul de 60 lei/bucată. Știind că în cele trei magazine se obțin sume egale de bani din vânzare, aflați prețul de vânzare a unei unități(bucăți) de produs la primul magazin.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
Notăm M_1, M_2, M_3 cele trei magazine.		1 p.
În M_1 se obțin $m \cdot p$ lei		
În M_2 se obțin $(m + n) \cdot 40$ lei		1 p.
În M_3 se obțin $(m - n) \cdot 60$ lei		1 p.
Conform anunțului avem: $m \cdot p = (m + n) \cdot 40 = (m - n) \cdot 60$		1 p.
Obținem: $m = 5n$		2 p.
Rezultă $p = 48$ lei		1 p.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x+3 & x+4 \\ 3 & x+1 & x+5 \end{pmatrix}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

- a). Demonstrați că $A(x)$ este inversabilă dacă și numai dacă $x \neq 0$.
b). Demonstrați că nu există $B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0) \cdot B = A(-1)$.
c). Determinați $x \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $A^{-1}(x) \in M_3(\mathbb{Z})$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$\det A(x) = -x$	1 p.
	$A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$	1 p.
b).	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	1 p.
	Presupunem că există $B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0) \cdot B = A(-1)$. Ar rezulta $\det A(0) \cdot \det B = \det A(-1)$.	1 p.
	Dar $\det A(0) = 0$ și $\det A(-1) = 1$. Obținem: $0 \cdot \det B = 1$ (fals) \Rightarrow nu există $B \in M_3(\mathbb{R})$ care să satisfacă egalitatea.	1 p.
c).	Adjuncta matricei $A(x)$ este: $A^*(x) = \begin{pmatrix} -1 & x+2 & -x-1 \\ x+2 & x-4 & -x+2 \\ -x-1 & -x+2 & x-1 \end{pmatrix}$	1 p.
	Dacă $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow A^*(x) \in M_3(\mathbb{Z})$ Cum $A^{-1}(x) = -\frac{1}{x} \cdot A^*(x) \Rightarrow A^{-1}(x) \in M_3(\mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$	

2. Fie a, b, c , lungimile laturilor unui triunghi și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} c-x & b \\ b & c+x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a). Demonstrați că $A(x) + A(-x) = 2 \cdot A(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

b). Demonstrați că dacă $\det A(a) = 0$, atunci triunghiul dat este dreptunghic.

c). Demonstrați că triunghiul dat este isoscel dacă și numai dacă $\det A(0) = 0$

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$A(x) + A(-x) = 2 \cdot \begin{pmatrix} c & b \\ b & c \end{pmatrix} = 2 \cdot A(0)$	2 p.
b).	$\det A(a) = \begin{vmatrix} c-a & b \\ b & c+a \end{vmatrix} = c^2 - a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$	2 p.
	Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul este dreptunghic, având ipotenuza de lungime c	1 p.
c).	$\det A(0) = \begin{vmatrix} c & b \\ b & c \end{vmatrix} = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$	1 p.
	Dacă $\det A(0) = 0 \Rightarrow b = c$ (deci triunghi isoscel) Dacă $b = c \Rightarrow \det A(0) = 0$	1 p.

3. a). Se dă funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\alpha \cdot x^4}{(x + \beta)^3}$

Să se determina $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ astfel încât graficul funcției să admită, ca asimptotă oblică spre ∞ dreapta de ecuație $y = x - 3$

b). Se dă funcția $f : (0, 4) \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ -\frac{\sin 2(x - 3)}{8(x - 3)}, & \text{dacă } x \in (3, 4) \end{cases}$

Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 3$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^4}{x(x + \beta)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^4}{x^4 + 3\beta x^3 + \dots} = \alpha = 1$	1 p.
	$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha x^4}{x(x + \beta)^3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x(x + \beta)^3}{x^3 + 3\beta x^2 + 3\beta^2 x + \beta^3} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3\beta x^3 - 3\beta^2 x - \beta^3}{x^3 + 3\beta x^2 + 3\beta^2 x + \beta^3} = -3\beta = -3 \Rightarrow \beta = 1$	2 p.
b).	$l_s = \lim_{x \nearrow 3} \frac{2 \cdot [\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 + x + 4}]}{x - 3} = \lim_{x \nearrow 3} \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 7} + \sqrt{x^2 + x + 4}} = -\frac{1}{4}$	2 p.
	$l_d = \lim_{x \searrow 3} \frac{-\sin 2(x - 3)}{8(x - 3)} = -\lim_{x \searrow 3} \frac{\sin 2(x - 3)}{2(x - 3)} \cdot \frac{2(x - 3)}{8(x - 3)} = -\frac{1}{4}$	1 p.

Cum $l_s = l_d = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ există $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{4}$	1 p.
--	------

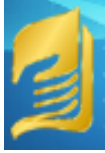
4. Zece elevi $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_{10}$ sunt așezați, în această ordine, în „șir indian” (ca și puncte coliniare cu E_1 pe primul loc și E_{10} pe ultimul loc). La o comandă dată, fiecare dintre ei fie că își schimbă locul cu un alt coleg, fie că rămân pe loc. La prima comandă elevii E_1 și E_6 rămân pe locurile lor, iar E_2 schimbă cu E_{10} , E_3 cu E_9 , E_4 cu E_8 și E_5 cu E_7 .

a) Care este ordinea lor după prima comandă?

b) Este posibil ca după a doua comandă să avem ordinea: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$?

Justificați răspunsul.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
a).	<u>Inițial:</u> $E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9; E_{10}$ <u>După prima comandă:</u> $E_1; E_{10}; E_9; E_8; E_7; E_6; E_5; E_4; E_3; E_2$	3 p.
b).	<u>Da.</u> $E_1 \leftrightarrow E_{10}; E_2 \leftrightarrow E_9; E_3 \leftrightarrow E_8; E_4 \leftrightarrow E_7; E_5 \leftrightarrow E_6$ Se obține ordine: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$	4 p.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se definește legea de compoziție „ $*$ ” prin:
 $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, (\forall) $x, y \in \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$, fixat.
- a). Să se demonstreze că: $x * y = (x - a) \cdot (y - a) + a$, (\forall) $x, y \in \mathbb{R}$.
- b). Demonstrați că mulțimea $G_a = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ”.
- c). Demonstrați că $(G_a, *)$ este grup abelian.
- d). Rezolvați ecuația: $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2015 \text{ ori}} = x$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$x * y = x(y - a) - a(y - a) + a = (x - a)(y - a) + a$	1 p.
b).	Să demonstrăm că $(\forall) x, y \in G_a \Rightarrow x * y \in G_a \Leftrightarrow (\forall) x > a, y > a \Rightarrow (x - a)(y - a) + a > 0$. (adevărat) $\Rightarrow G_a$ este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ”	1 p.
c).	Comutativitatea este evidentă. $(x * y) * z = [(x - a)(y - a) + a] * z = (x - a)(y - a)(z - a) + a = x * (y * z)$, $(\forall) x, y, z \in G_a \Rightarrow$ operația „ $*$ ” este asociativă.	1 p.
	Elementul neutru este: $e = a + 1 > a \Rightarrow e \in G_a$	1 p.
	Simetricul elementului $x \in G_a$ este $x' = a + \frac{1}{x - a} \in G_a$	1 p.
d).	$x * x = (x - a)^2 + a \Rightarrow x * x * x = (x - a)^3 + a$, ..., $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2015 \text{ ori}} = (x - a)^{2015} + a$	1 p.
	$(x - a)^{2015} + a = x \Rightarrow (x - a)^{2014} = 1 \Rightarrow x_1 = a - 1 \notin G_a$ și $x_2 = a + 1 \in G_a$, deci este soluția ecuației. Obs! Poate observa că $x = e = a + 1$ este o soluție dar trebuie demonstrată <u>unicitatea</u> ei!	1 p.

2. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 7^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A(x) / x \in \mathbb{R}\}$

- a). Verificați faptul că $I_3 \in G$.
 b). Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 c). Demonstrați că (G, \cdot) este grup comutativ.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$A(0) = I_3 \Rightarrow I_3 \in G$	1 p.
b).	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 7^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	1 p.
c).	$A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x) \Rightarrow$ comutativitate $(A(x) \cdot A(y)) \cdot A(z) = A(x+y) \cdot A(z) = A(x+y+z) = A(x) \cdot A(y+z) =$ $= A(x) \cdot (A(y) \cdot A(z))$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow$ asociativitatea.	2 p.
	$A(x) \cdot A(e) = A(x) \Rightarrow A(x+e) = A(x) \Rightarrow x+e = x \Rightarrow e = 0 \Rightarrow A(0) \in G$ este element neutru.	1 p.
	$A(x) \cdot A(x') = A(0) \Rightarrow A(x+x') = A(0) \Rightarrow x' = -x \Rightarrow A(-x) = \begin{pmatrix} 7^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ este simetrica matricei $A(x)$	2 p.

3. a). Demonstrați că: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$
 b). Calculați: $\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx$, $x \in \mathbb{R}$
 c). Demonstrați că $\frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} < \frac{2}{3}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și dacă există un număr natural nenul n astfel încât să avem: $\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx < 0,001$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	Se verifică prin calcul direct	1 p.
b).	$\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx = \int \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$	2 p.
	$\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctg(x+1) + \frac{1}{2} \arctg(x-1) + C$	1 p.
c).	$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$ (adevărat)	1 p.
d).	Folosind inegalitatea de la c). avem $\int_0^1 \left(\frac{x^2 + 2}{x^4 + 4}\right)^n \cdot dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot dx$	1 p.

<p>Trebuie să avem: $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,001$ și cum $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ rezultă că există un număr $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să aibă loc.</p> <p>SAU</p> <p>Logaritmăm inegalitatea de mai sus și ținem seama de faptul</p> <p>că: $\lg\left(\frac{2}{3}\right) = \lg 2 - \lg 3 < 0$.</p> <p>Obținem: $n \cdot (\lg 2 - \lg 3) < -3 \Rightarrow n \cdot (\lg 3 - \lg 2) < 3 \Rightarrow n > \frac{3}{\lg 3 - \lg 2}$</p> <p>Luăm: $n = \left\lceil \frac{3}{\lg 3 - \lg 2} \right\rceil + 1$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.</p>	1 p.
---	------

4. Se consideră funcția $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{e^{x+1}}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ \frac{2x+m}{x^2+x+e} & \text{dacă } x \in [-1, 0), \text{ unde } m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a). Determinați parametrul real m astfel încât funcția f să admită primitive pe intervalul $[-1, \infty)$.

b). Determinați o primitivă $F' = F(x)$ a restricției funcției f la intervalul $[0, \infty)$, care satisface condiția $F(0) = \frac{3}{e}$.

c). Demonstrați că $\int_0^1 f(x) \cdot dx < \frac{3}{e}$.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
a).	$l_d = f(0) = \frac{1}{e}$ și $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{2x+m}{x^2+x+e} \right) = \frac{m}{e}$	1 p.+ 1 p.
	Pentru $m = 1$, funcția f este continuă și în $x = 0$ și deci admite primitive pe intervalul $[-1, \infty)$	1 p.
b).	$F(x) = \int (x+1) \cdot e^{-(x+1)} \cdot dx = -(x+1) \cdot e^{-(x+1)} + \int e^{-(x+1)} \cdot dx = -(x+2) \cdot e^{-(x+1)} + C$	1 p.
	Din $F(0) = \frac{3}{e} \Rightarrow C = \frac{5}{e} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{e} - \frac{x+2}{e^{x+1}}$	1 p.
c).	$f(x) \cdot dx = -\frac{x+2}{e^{x+1}} \Big _0^1 = -\frac{3}{e^2} + \frac{2}{e}$	1 p.
	$\int_0^1 f(x) \cdot dx < \frac{3}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2} < \frac{3}{e} \Leftrightarrow \frac{3}{e^2} > -\frac{1}{e}$ (adevărat)	1 p.