INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A IX-A

1. În planul raportat la un reper cartezian (xOy) se consideră punctele $A(-3,1)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,2)$.

a) Demonstrați că nu există nicio funcţie al cărei grafic să fie reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$.

b) Determinaţi funcţia al cărei grafic este reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

2. Numerele $x \in (0,2\pi)$ şi $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$.

a) Dacă $x \neq \pi$, demonstraţi că $a \cdot (a+b+c) = b^2$.

b) Determinaţi numărul x, ştiind că a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, având centrul cercului circumscris O şi centrul de greutate G. Dacă M este un punct oarecare din plan, definim punctul M' prin relaţia $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) Dacă M este situat pe cercul de rază R circumscris triunghiului ABC, arătaţi că punctul asociat M' aparţine cercului de centru A şi rază $2R$.

4. O foaie de tablă are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m şi lăţimea de 4 m. Decupând această foaie obţinem, fără pierderi, cinci dreptunghiuri care constituie cele cinci feţe ale unui rezervor paralelipipedic fără capac. Determinaţi volumul acestui rezervor, ştiind că este maxim posibil.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Dacă z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, arătați că $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2. Fie $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}$.

a) Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ este număr natural.

b) Arătați că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p,q\in\mathbb{N}$ așa încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3}$, iar $3q^2=p^2-1$.

c) Demonstrați că $[A]$ este număr natural impar (unde $[A]$ reprezintă partea întreagă a lui A).

d) Demonstrați că $\frac{([A]-1)([A]+3)}{12}$ este pătrat perfect.

3. Rezolvați ecuația $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

4. Avem p penare și c creioane. Dacă așezăm câte un creion în fiecare penar, rămân n creioane afară. Dacă așezăm câte n creioane în fiecare penar, rămân n penare goale. Câte creioane și câte penare avem ?

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dați exemplu de trei matrici $A,B,C\in\mathcal{M}$ astfel încât $\det A=0, \det B=4, \det C=-4$.

c) Demonstrați că $\forall T\in\mathcal{M}$, atunci $\det T\in\{-4,0,4\}$.

d) Argumentați că, dacă $L\in\mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.

2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1,0); B(0,2); C(2,3); D(4,2)$ și $E(3,0)$. Calculați prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.

b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale.

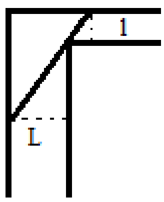
(Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon $\mathcal{P}$ ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu $\mathcal{A}(\mathcal{P})=i+\frac{f}{2}-1$, unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului $\mathcal{P}$, respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui $\mathcal{P}$*)

3. Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} 2015x+2016y+2017z=\frac{1}{2}x \\ 2017x+2015y+2016z=\frac{1}{2}y \\ 2016x+2017y+2015z=\frac{1}{2}z \end{cases}$$

a) Indicați o soluție a sistemului.

b) Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

4. Dorel vrea să transporte o țeavă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită.



Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este:
$$\Lambda_{\max}=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XII-A

1. Să se rezolve in $\mathbb{Z}_6$ sistemul : $\begin{cases} x(y+z)=\hat{2} \\ y(x+z)=\hat{2} \\ z(x+y)=\hat{2} \end{cases}$

2. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}dt$.

3. Să se determine numerele reale m, p, q şi să se rezolve ecuaţiile $x^3-3x+m=0$, $x^4+px^2+qx+2=0$, ştiind ca au o soluţie dublă comună.

4. Să se determine $n > 0$ astfel încât aria $S(n)$ a mulţimii cuprinse între reprezentarea grafică a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-n|$, axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ să fie minimă.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. În planul raportat la un reper cartezian (xOy) se consideră punctele $A(-3,1)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,2)$.

a) Demonstrați că nu există nicio funcție al cărei grafic să fie reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$.

b) Determinaţi funcţia al cărei grafic este reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

Soluţie.
a) O dreaptă verticală nu poate tăia graficul unei funcţii în mai multe puncte. În cazul nostru, axa Oy taie atât segmentul $[AB]$ cât şi segmentul $[AC]$. 3p

b) Domeniul funcţiei cerute este intervalul $[-3,4]$.. 1p

Pe fiecare dintre intervalele $[-3,1]$ şi $[1,4]$ funcţia este liniară, deci legea sa de corespondenţă este de forma $f(x)=ax+b$. 1p

Obţinem $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x+1}{2}, & x\in[-3,1] \\ x-2, & x\in(1,4] \end{cases}$. 2p

2. Numerele $x\in(0,2\pi)$ şi $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin 3x}{b}=\dfrac{\sin 5x}{c}$.

a) Dacă $x\neq\pi$, demonstraţi că $a\cdot(a+b+c)=b^2$.

b) Determinaţi numărul x, ştiind că a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluţie.
a) Pentru $x\neq\pi$, toate cele trei rapoarte din enunţ sunt nenule. 1p

Dacă $\dfrac{1}{k}, k\in\mathbb{R}^*$ este valoarea lor comună, atunci $a(a+b+c)=k^2\cdot\sin x\cdot(\sin x+\sin 5x+\sin 3x)=$
$=k^2\cdot\sin x\cdot(2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x)=k^2\cdot\sin 3x\cdot\sin x\cdot(2-4\sin^2 x+1)=k^2\cdot\sin 3x\cdot(3\sin x-4\sin^3 x)=$
$=k^2\cdot\sin^2 3x=b^2$. 3p

b) Avem soluţia $x=\pi$. 1p

Dacă $x\neq\pi$, atunci $b^2=a(a+b+c)=a\cdot 3b$, prin urmare $b=3a$. Rezultă că $\sin 3x=3\sin x$, de unde $\sin x=0$, contradicţie. 2p

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, având centrul cercului circumscris O şi centrul de greutate G. Dacă M este un punct oarecare din plan, definim punctul M' prin relaţia $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) Dacă M este situat pe cercul de rază R circumscris triunghiului ABC, arătaţi că punctul asociat M' aparţine cercului de centru A şi rază $2R$.

Soluţie.

a) $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GM} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) =$

$= 2\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = 2\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MG}$ 3p

b) Din relaţia de la punctul a), punctele M, G şi M' sunt coliniare, astfel încât $GM' = 2GM$.

.... 1p

O fiind mijlocul ipotenuzei BC, punctele A, G şi O sunt şi ele coliniare, cu $AG = 2GO$. 1p

Rezultă că triunghiurile AGM' şi OGM sunt asemenea. Deducem că $AM' = 2OM = 2R$ şi, de aici, concluzia problemei. 2p

4. O foaie de tablă are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m şi lăţimea de 4 m. Decupând această foaie obţinem, fără pierderi, cinci dreptunghiuri care constituie cele cinci feţe ale unui rezervor paralelipipedic fără capac. Determinaţi volumul acestui rezervor, ştiind că este maxim posibil.

Soluţie.

Fie x şi y dimensiunile bazei paralelipipedului, iar z înălţimea acestuia; atunci $xy + 2xz + 2yz = 48$ şi $V = xyz$ este maxim posibil. 2p

Din inegalitatea mediilor obţinem că $4V^2 = (xy)(2xz)(2yz) \le \left(\frac{xy + 2xz + 2yz}{3}\right)^3 = 16^3$, prin urmare $V \le 32$. 3p

În inegalitatea mediilor avem egalitate dacă şi numai dacă $xy = 2xz = 2yz = \frac{48}{3}$, adică atunci când $x = y = 4$, $z = 2$. Prin urmare, $V_{\max} = 32\ \mathrm{m}^3$ se atinge dacă din foaia iniţială se taie un pătrat cu latura de 4 m şi patru dreptunghiuri cu lungimea de 4 m şi lăţimea de 2 m. 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Dacă z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, arătați că $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Soluţie.
Varianta I – metoda inducției matematice

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$P(n): z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Etapa I: verificarea

$P(0): z^0+\frac{1}{z^0}=2\cos 0,$ adevărată

$P(1): z^1+\frac{1}{z^1}=2\cos\theta,$ adevărată 1p

Etapa II: demonstrația $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(k-1): z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}=2\cos(k-1)\theta,\ P(k): z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta,$

Arătăm că $z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=2\cos(k+1)\theta$ 1p

Din $z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta$ și $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow \left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow$

$z^{k+1}+z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-\left(z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}\right)\Rightarrow$

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos(k-1)\theta$ 2p

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=$

$=2\cos(k+1)\theta$. 1p

$P(0), P(1)$ adevărate, $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\rightarrow P(k+1) \quad \forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow P(k)$ adevărată $\forall k\in\mathbb{N}$

.... 1p

Varianta a II a:

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z\neq 0$, ecuația devine $z^2-2z\cos\theta+1=0$.

$\Delta=4\cos^2-4=-4\sin^2\theta \Rightarrow z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2} \Leftrightarrow z_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 2p

Dacă $z=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n \underset{Moivre}{\Rightarrow} z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 1p

$\Rightarrow z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{\cos n\theta-i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta}$ 1p

$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$ 1p

Similar se demonstrează pentru $z=\cos\theta-i\sin\theta$ 1p

2. Fie $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}$.

a) Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ este număr natural.

b) Arătați că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p,q\in\mathbb{N}$ așa încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3}$, iar $3q^2=p^2-1$.

c) Demonstrați că $[A]$ este număr natural impar (unde $[A]$ reprezintă partea întreagă a lui A).

d) Demonstrați că $\frac{([A]-1)([A]+3)}{12}$ este pătrat perfect.

Soluție.

a) Se demonstrează folosind dezvoltarea binomului lui Newton 1p

b) Demonstrăm folosind metoda inducției matematice:

$P(n):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

<u>Etapa I – verificare</u>: $P(0):\left(2+\sqrt{3}\right)^0=1+0\sqrt{3},\ p=1,q=0,\ p^2-1=3q^2$ adevărat 1p

<u>Etapa II – demonstrația</u>: $P(k)\to P(k+1)$: $P(k):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

Demonstrăm $P(k+1):\exists p',q'\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p'+q'\sqrt{3},\ p'^2-1=3q'^2$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(p+q\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\underbrace{(2p+3q)}_{p'}+\sqrt{3}\underbrace{(p+2q)}_{q'}=p'+q'\sqrt{3}$

Demonstrăm că $p'^2-1=3q'^2,\ p',q'\in\mathbb{N}$ 1p

c) $A=p+q\sqrt{3},\ p,q\in\mathbb{N}$ și $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \sqrt{3q^2}=\sqrt{p-1} \Rightarrow A=p+\sqrt{p^2-1}$ 1p

$p-1\le\sqrt{p^2-1}<p \,\Big|+p \Rightarrow 2p-1\le p+\sqrt{p^2-1}<2p \Rightarrow \left[p+\sqrt{p^2-1}\right]=2p-1 \Rightarrow [A]=2p-1$,

$\Rightarrow [A]=2p-1$ este număr natural impar 1p

d) $[A]=2p-1,\ p\in\mathbb{N}\Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow \frac{([A]-1)\cdot([A]+3)}{12}=\frac{(2p-2)(2p+2)}{12}=\frac{2^2(p-1)(p+1)}{12}=\frac{p^2-1}{3}$

Dar $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \frac{([A]-1)\cdot([A]+3)}{12}=q^2$ - pătrat perfect 1p

3. Rezolvați ecuația $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

Soluție.
Metoda I:
Condiții de existență a logaritmilor:
$x > 0, x \neq 1$ *și* $3x - 2 > 0 \Rightarrow x\epsilon \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \setminus \{1\}$ 1p
Notăm $2^{\log_x(3x-2)} = a, a > 0$ și $3^{\log_x(3x-2)} = b, b > 0.$
Observăm că $6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 6^{\frac{1}{2}\log_x(3x-2)} = \sqrt{6^{\log_x(3x-2)}} = \sqrt{ab}$ 2p
Ecuația devine:$3a + 2b - 5\sqrt{ab} = 0, a, b > 0.$
Împărțind la $\sqrt{ab}$, ecuația devine $3\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 5 = 0$ 1p
Folosind notația $\sqrt{\frac{a}{b}} = t, t > 0$, obținem ecuația $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, deci $3t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$ 1p
Cum $\sqrt{\frac{a}{b}} = t$, vom avea $\frac{a}{b} = t^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = t^2$.
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = 1$, deci $\log_x(3x-2) = 0$, dar asta conduce la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, deci $\log_x(3x-2) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p
Metoda a II-a:
condițiile de existență 1p
Ecuația $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$ poate fi scrisă sub forma
$3 \cdot 2^{2\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot 3^{2\log_{x^2}(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$, deci împărțind la $6^{\log_{x^2}(3x-2)}(> 0)$ obținem ecuația $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} - 5 = 0$ 2p
Dacă $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = t$, vom avea $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, $3t^2 - 5t + 2 = 0$,cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$
.... 2p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = 1$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 0$, aceasta conducând la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = \frac{2}{3}$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 1$ și $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p

4. Avem *p* penare și *c* creioane. Dacă așezăm câte un creion în fiecare penar, rămân *n* creioane afară. Dacă așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, rămân *n* penare goale. Câte creioane și câte penare avem ?

Soluție.
Așezăm câte un creion în fiecare penar, atunci rămân *n* creioane: $p + n = c$.
Așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, avem *n* penare goale: $n \cdot (p - n) = c$ 1p

$p + n = n \cdot (p - n) \Rightarrow p + n = np - n^2 \Rightarrow p(n-1) = n + n^2 \Rightarrow p = \frac{n(n+1)}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

$c = p + n = \frac{n(n+1)}{n-1} + n = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{n-1} \Rightarrow c = \frac{2n^2}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

Cum $\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/(n^2 + n) \Rightarrow (n-1)/(2n^2 + 2n) \\ c \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/2n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (n-1)/2n \\ (n-1)/(2n-2) \end{array}\right\} \Rightarrow (n-1)/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1\in\{1,2\}\Rightarrow n\in\{2,3\}$ 2p

Dacă $n=2\Rightarrow p=\frac{2\cdot 3}{1}=6;\quad c=\frac{2\cdot 2^2}{2-1}=8$ 1p

Dacă $n=3\Rightarrow p=\frac{3\cdot 4}{2}=6;\quad c=\frac{2\cdot 9}{2}=9$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elemente din mulţimea $\{-1,1\}$.

a) Aflaţi cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

b) Daţi exemplu de trei matrici $A,B,C\in\mathcal{M}$ astfel încât $\det A=0, \det B=4, \det C=-4$.

c) Demonstraţi că $\forall T\in\mathcal{M},$ atunci $\det T\in\{-4,0,4\}$.

d) Argumentaţi că, dacă $L\in\mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.

Soluţie.

a) $\text{card}\mathcal{M}=2^9=512$ 2p

b) De exemplu:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, \det A=0$$ 1p

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}, \det B=4$$ 1p

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}, \det C=-4$$ 1p

c) Fie $T\in\mathcal{M}$. Atunci $-6\le\det T\le 6$

Utilizând proprietăţile determinanţilor, $4\,|\det T \Rightarrow \det T\in\{-4,0,4\}$ 1p

d) Matricea L^2 va avea numai elemente impare şi utilizând inducţia matematică obţinem că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ matricea L^n are doar elemente impare. În particular matricea L^{2016} are toate elementele numere impare, deci nenule. 1p

2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1,0); B(0,2)$; $C(2,3); D(4,2)$ şi $E(3,0)$. Calculaţi prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.

b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale.

(Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon* $\mathcal{P}$ *ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu* $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = i + \frac{f}{2} - 1$, *unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului* $\mathcal{P}$, *respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui* $\mathcal{P}$*)*

Soluţie.

a)

Metoda 1: $\text{Aria}(ABCDE) = \text{Aria}(ABC) + \text{Aria}(ACE) + \text{Aria}(CED) =$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{5}{2} + 3 + \frac{5}{2} = 8$$ 2p

Metoda 2: Utilizăm teorema lui Pick: $\mathcal{A}_{ABCDE} = i + \frac{f}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$ 2p

Metoda 3: Fie $O(0,0); U(0,3); V(4,3); T(4,0)$;

$\text{Aria}(ABCD) = \text{Aria}(OUVT) - \text{Aria}(OAB) - \text{Aria}(UBC) - \text{Aria}(VDC) - \text{Aria}(DTE) =$

$= 4 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} = 8$ 2p

b) Presupunem prin reducere la absurd că ar exista un astfel de triunghi.

Pe de o parte din formula lui Pick obținem că aria unui astfel de triunghi este un număr rațional.

Pe de altă parte aria unui triunghi echilateral este $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, unde latura este de lungime *l*. Deoarece $l^2 \in \mathbb{N}^*$, obținem că aria triunghiului $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Contradicție. 1p

3. Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} 2015x + 2016y + 2017z = \frac{1}{2}x \\ 2017x + 2015y + 2016z = \frac{1}{2}y \\ 2016x + 2017y + 2015z = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

a) Indicați o soluție a sistemului.

b) Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

Soluție.

a) Evident, avem soluția banală $(0,0,0)$ 2p

b)

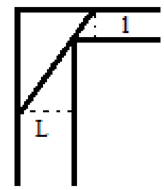
Determinantul matricei sistemului, $\det A = \begin{vmatrix} 2015 - \frac{1}{2} & 2016 & 2017 \\ 2017 & 2015 - \frac{1}{2} & 2016 \\ 2016 & 2017 & 2015 - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ 1p

$$\det A=\left(2015+2016+2017-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2017 & 2015-\frac{1}{2} & 2016\\ 2016 & 2017 & 2015-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$ 1p

Fiecare factor al produsului este nenul 2p

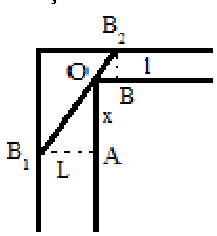
Din teorema lui Cramer rezultă că sistemul are doar soluția banală $(0,0,0)$ 1p

4. Dorel vrea să transporte o țeavă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită.



Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este $\Lambda_{\max}=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Soluție.



Fie $OA=x$. Lungimea maximă a țevii este minimul lungimii segmentului B_1B_2

$OB_1=\sqrt{L^2+x^2},\ OB_2=\dfrac{l\cdot\sqrt{L^2+x^2}}{x}$ 1p

Trebuie aflat minimul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{L^2+x^2}+\dfrac{l}{x}\sqrt{L^2+x^2}$

.... 2p

$f'(x)=\dfrac{x^3-l\cdot L^2}{x^2\cdot\sqrt{L^2+x^2}}$ 1p

$f'(x)=0\Rightarrow x_0=\sqrt[3]{l\cdot L^2}$ și este abscisa punctului de minim 1p

$\Lambda_{\max}=f\left(\sqrt[3]{l\cdot L^2}\right)=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A -XII A

1. Să se rezolve in $\mathbb{Z}_6$ sistemul : $\begin{cases} x(y+z)=\hat{2} \\ y(x+z)=\hat{2} \\ z(x+y)=\hat{2} \end{cases}$

Soluție

Adunând ecuațiile avem: $\hat{2}(xy+yz+xz)=\hat{0} \Rightarrow xy+yz+xz \in \{\hat{0},\hat{3}\}$ 3p

Cazul I $xy+yz+zx=\hat{0} \Rightarrow xy=yz=xz=\hat{4}$ cu soluțiile:
$(\hat{2},\hat{2},\hat{2}),(\hat{5},\hat{2},\hat{2}),(\hat{2},\hat{5},\hat{2}),(\hat{2},\hat{2},\hat{5}),(\hat{4},\hat{4},\hat{4}),(\hat{1},\hat{4},\hat{4}),(\hat{4},\hat{1},\hat{4}),(\hat{4},\hat{4},\hat{1})$ 3p

Cazul II $xy+xz+yz=\hat{3} \Rightarrow xy=xz=yz=\hat{1}$ cu soluțiile $(\hat{1},\hat{1},\hat{1}),(\hat{5},\hat{5},\hat{5})$ 1p

2. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\,dt$.

Soluţie

Funcţia $f:[x+3,2x+3]\to\mathbb{R}, f(t)=t\sqrt{t^3+9}$ este continuă 1p

Conform formulei Leibniz-Newton $\int\limits_{x+3}^{2x+3} f(t)\,dt = F(2x+3)-F(x+3)$, unde F este o primitivă a funcţiei f 1p

Folosim regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$ 1p

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(2x+3)-F(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2F'(2x+3)-F'(x+3)\right)=\lim_{x\to 0}\left(2f(2x+3)-f(x+3)\right)=f(3)=18$$
.... 4p

3. Să se determine numerele reale m, p, q şi să se rezolve ecuaţiile $x^3-3x+m=0$, $x^4+px^2+qx+2=0$, ştiind ca au o soluţie dublă comună.

Soluţie

Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+m, g(x)=x^4+px^2+qx+2$ şi α soluţia dublă comună.

Atunci $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ şi $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$ 2p
$f'(\alpha)=0$ implică $\alpha=1$ sau $\alpha=-1$ 1p
Caz I Dacă $\alpha=1$ atunci $m=2, p=-1, q=-2$ 1p
Caz II Dacă $\alpha=-1$, atunci $m=-2, p=-1, q=2$ 1p
Rezolvarea completă a unei ecuații 1p
Rezolvarea completă a celeilalte ecuații 1p

4. Să se determine $n > 0$ astfel încât aria $S(n)$ a mulţimii cuprinse între reprezentarea grafică a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-n\right|$, axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ să fie minimă.

Soluție

f este continuă şi nenegativă deci Γ_f are arie şi

$S(n)=Aria(\Gamma_f)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left|x^2-n\right|dx$ 1p

Cazul I: Dacă $\sqrt{n}\ge 1\Rightarrow S(n)=\int_0^1(n-x^2)\,dx=n-\frac{1}{3}\ge\frac{2}{3}$ 2p

Cazul II: Dacă $\sqrt{n}\in[0,1)\Rightarrow S(n)=\int_0^{\sqrt{n}}(-x^2+n)\,dx+\int_{\sqrt{n}}^1(x^2-n)\,dx=\frac{4n\sqrt{n}-3n+1}{3}$ 2p

$\sqrt{n}=t, g(t)=4t^3-3t^2+1$, t≥0 îşi atinge valoarea minimă $\frac{3}{4}$ pentru $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1}{4}$ 1p

Concluzia $n=\frac{1}{4}$ 1p