

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil Filologie / Științe sociale

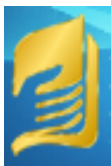


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

- Suprafața unui nufăr se dublează în fiecare zi. După 40 de zile nufărul acoperă tot lacul. După câte zile nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului ?
 - Există trei numere reale a, b, c care să fie simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică ?
- Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2x + m$, $m \in \mathbb{R}^*$.
 - Să se determine valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox .
 - Pentru ce valori reale ale lui m graficul funcției f este situat deasupra axei Ox ? Dar sub axa Ox ?
 - Să se determine valorile reale ale lui m pentru care dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.
- La o fabrică de conserve s-a pierdut 6% din cantitatea de fructe după prima sortare, iar după a doua sortare s-a pierdut 2% din cantitatea rămasă după prima sortare. În final au rămas 184,24 tone de fructe. 12,5% din cantitatea bună de prelucrat se folosește pentru dulceață și cu 500% mai mult pentru gem.
 - Care este cantitatea de fructe destinată sortării ?
 - Ce cantitate de fructe rămâne după prepararea dulceței și a gemului ?
- Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g(x) = -2x + 4$. Să se calculeze cosinusul unghiului format de graficele celor două funcții.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil Filologie / Științe sociale

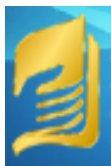


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Un pătrat are două laturii de ecuații: $x + 5y - 17 = 0$ și $5x - y - 7 = 0$ și o diagonală de ecuație $3x + 2y + 1 = 0$.
 - a) Să se determine coordonatele vârfurilor pătratului.
 - b) Să se scrie ecuațiile celorlalte două laturi.
 - c) Să se calculeze aria pătratului.
2. Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, unde $y \in \mathbb{R}, y > 0, n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Determinați n pentru care coeficienții termenilor de rang 1, 2 respectiv 3 ai dezvoltării formează o progresie aritmetică.
 - b) Pentru $n = 8$ găsiți termenii dezvoltării în care exponentul lui y să fie număr natural.
3. Trei muncitori realizează împreună 2064 de piese. Primul muncitor realizează 140% din cantitatea pe care o realizează al doilea muncitor, iar 60% din cât realizează al doilea muncitor este cu 15% mai mult decât 25% din cât realizează al treilea muncitor. Câte piese are de realizat fiecare muncitor ?
4. Să se rezolve pe domeniul maxim de definiție ecuațiile:
 - a) $\log_3(\log_4(x^2 - 17)) = 1$
 - b) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil Filologie / Științe sociale



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

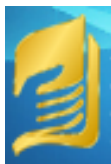
CLASA A XI-A

- La o stație meteorologică sunt înregistrate temperaturile dimineața, la prânz și seara. S-a constatat că la prânz temperatura este cu 30% mai mare decât dimineața, iar seara se înregistrează o scădere cu 20% a temperaturii față de prânz. Se știe că diferența de temperatură dintre seară și dimineața este de un grad.
 - Să se calculeze cele trei temperaturi măsurate.
 - Cu cât la sută s-a mărit temperatura seara față de dimineața.
- Seria statistică următoare reprezintă numărul de tablete vândute de o firmă într-o lună, luând ca valori clasele ce reprezintă prețul lor în euro.

Preț (euro)	[40;80)	[80;120)	[120;160)	[160;200)	[200;240)	[240;280]
Număr de tablete	50	70	90	100	50	40

- Calculați prețul mediu al unei tablete vândute de firmă și aflați clasa mediană.
 - În luna următoare numărul de tablete vândute crește sau scade cu același procent în fiecare clasă. Care sunt clasele cu creșteri de vânzări astfel încât numărul total de tablete vândute este același?
- Într-o regiune, fiecare dintre cele n orașe existente este legat în mod direct, prin căi ferate, de exact alte trei 3 orașe, astfel încât traseul minim ce pleacă dintr-un oraș A și se întoarce tot în A conține 4 legături directe.
 - Determinați numărul minim de orașe care pot fi legate astfel.
 - În condițiile problemei, este posibil să avem 9 orașe?
 - Un graf-turneu este un graf orientat complet astfel încât între oricare două vârfuri distincte x și y există unul și numai unul dintre arcele (x, y) sau (y, x) . Pentru un graf-turneu cu n vârfuri x_1, x_2, \dots, x_n notăm cu r_i numărul arcelor care intră în x_i și cu s_i numărul arcelor care ies din x_i .
 - Justificați că: $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
 - Arătați că: $r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil Filologie / Științe sociale

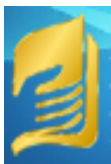


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie X o matrice pătratică de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, care verifică ecuația $X^2 + X - A = O_2$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $X = A$ verifică ecuația din enunț.
 - b) Arătați că $(2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.
 - c) Determinați toate soluțiile ecuației din enunț.
2. Într-un sistem de axe carteziene xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ și $B_n\left(\frac{2n}{n^2+1}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - a) Determinați aria triunghiului OAB_1 .
 - b) Determinați ecuația dreptei AB_{-1} .
 - c) Pot fi coliniare punctele B_0, B_1, B_n ? Justificați răspunsul!
3. Pe mulțimea numerelor reale considerăm legea de compoziție asociativă " \circ " definită prin $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice x, y numere reale.
 - a) Determinați elementul neutru al acestei legi.
 - b) Arătați că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$.
 - c) Determinați numerele reale x care verifică ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = x^2 - 12x + 42$.
4. Printre elementele unei matrice cu 4 linii și 4 coloane există 4 litere, astfel încât se află o singură literă pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare dintre cele două diagonale. Câte soluții există, dacă cele 4 litere sunt identice? Dar dacă sunt diferite? Justificați răspunsul!

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. a) Suprafața unui nufăr se dublează în fiecare zi. După 40 de zile nufărul acoperă tot lacul. După câte zile nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului ?
b) Există trei numere reale a, b, c care să fie simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică ?

Soluție.

- a) Notăm u – suprafața inițială a nufărului 1p
Suprafața nufărului după prima zi este $2u$ 1p
Suprafața nufărului după a 40-a zi este $2^{40}u$ 1p
Nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului după 39 de zile 1p
b) Fie numerele a, b, c în progresie aritmetică $\Rightarrow a, a+r, a+2r$ 0,5p
 a, b, c în progresie geometrică $\Rightarrow a, qa, q^2a$ 0,5p
Pune condiția $\begin{cases} a+r=qa \\ a+2r=q^2a \end{cases}$ 1p
Finalizare, $r=0, q=1, a=b=c$ 1p

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx^2 - 2x + m, m \in \mathbb{R}^*$.

- a) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox .
b) Pentru ce valori reale ale lui m graficul funcției f este situat deasupra axei Ox ? Dar sub axa Ox ?
c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Soluție.

- a) $G_f \cap Ox \neq \emptyset \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4 - 4m^2 \geq 0$ 1p
 $4 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(1-m)(1+m) \geq 0 \Rightarrow m \in [-1, 1]$ 1p
b) Graficul funcției este situat deasupra axei $Ox \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 0,5p
 $\Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow m \in (1, +\infty)$ 1p
Graficul funcției este situat sub axa $Ox \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 0,5p

$$\Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \dots\dots\dots 1p$$

c) Sistemul $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = mx^2 - 2x + m \end{cases}$ trebuie să aibă soluție unică $\Leftrightarrow mx^2 - 4x + m - 3 = 0$ are soluție unică
 1p

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4m(m - 3) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 4\} \dots\dots\dots 1p$$

3. La o fabrică de conserve s-a pierdut 6% din cantitatea de fructe după prima sortare, iar după a doua sortare s-a pierdut 2% din cantitatea rămasă după prima sortare. În final au rămas 184,24 tone de fructe. 12,5% din cantitatea bună de prelucrat se folosește pentru dulceață și cu 500% mai mult pentru gem.

- a) Care este cantitatea de fructe destinată sortării ?
- b) Ce cantitate de fructe rămâne după prepararea dulceței și a gemului ?

Soluție.

Fie x cantitatea inițială de fructe.

a) După prima sortare rămân $\frac{94}{100}x \dots\dots\dots 1p$

După a doua sortare rămân $\frac{98}{100} \cdot \frac{94}{100}x \dots\dots\dots 1p$

$\frac{98}{100} \cdot \frac{94}{100}x = 184,24 \text{ tone} \Rightarrow x = 200 \text{ tone} \dots\dots\dots 2p$

b) Pentru dulceață se folosesc $\frac{12,5}{100} \cdot 184,24 = 23,03 \text{ tone fructe} \dots\dots\dots 1p$

Pentru gem se folosesc $23,03 + 5 \cdot 23,03 = 138,18 \text{ tone fructe} \dots\dots\dots 1p$

Cantitatea rămasă este $23,03 \text{ tone fructe} \dots\dots\dots 1p$

4. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g(x) = -2x + 4$. Să se calculeze cosinusul unghiului format de graficele celor două funcții.

Soluție.

$G_f \cap G_g = \{A\}, \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, A(1, 2) \dots\dots\dots 1p$

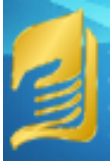
$G_f \cap Ox = \{B\}, \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}, B(-1, 0) \dots\dots\dots 1p$

$G_g \cap Ox = \{C\}, \begin{cases} y = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}, C(2, 0) \dots\dots\dots 1p$

În triunghiul $ABC: AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \dots\dots\dots 2p$

Aplicăm teorema cosinusului în $\Delta ABC, \varphi = \sphericalangle BAC :$

$\cos \varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{8 + 5 - 9}{2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \dots\dots\dots 2p$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



**ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016**

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

- 1.** Un pătrat are două laturii de ecuații: $x+5y-17=0$ și $5x-y-7=0$ și o diagonală de ecuație $3x+2y+1=0$.
- Să se determine coordonatele vârfurilor pătratului.
 - Să se scrie ecuațiile celorlalte două laturi.
 - Să se calculeze aria pătratului.

Soluție.

- a) Fie $d_1 : x+5y-17=0, d_2 : 5x-y-7=0, d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow A(2,3)$ 1p
 Fie $d : 3x+2y+1=0, d \cap d_1 = \{B\} \Rightarrow B(-3,4)$ 1p
 $d \cap d_2 = \{D\} \Rightarrow D(1,-2)$ 1p
 $[AC], [BD]$ au același mijloc $M(-1,1)$ 1p
 obținem $C(-4,-1)$ 1p
 b) $BC : 5x-y+19=0$ 0,5p
 $DC : x+5y+9=0$ 0,5p
 c) Determinăm lungimea laturii $AB = \sqrt{26}$ 0,5p
 Calculăm aria $\mathcal{A} = 26$ 0,5p

- 2.** Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, unde $y \in \mathbb{R}, y > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

- Determinați n pentru care coeficienții termenilor de rang 1, 2 respectiv 3 ai dezvoltării formează o progresie aritmetică.
- Pentru $n = 8$ găsiți termenii dezvoltării în care exponentul lui y să fie număr natural.

Soluție.

a) $T_{k+1} = C_n^k (\sqrt{y})^{n-k} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^k = C_n^k y^{\frac{n-k}{2} - \frac{k}{4}} \cdot \frac{1}{2^k}$

Coeficienții primilor trei termeni sunt: $C_n^0 = 1; C_n^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}; C_n^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{n(n-1)}{8}$ 2p

Condiția de progresie aritmetică este: $2 \cdot \frac{n}{2} = 1 + \frac{n(n-1)}{8} \Leftrightarrow$ 1p

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow n = 1 \text{ (nu convine) sau } n = 8. \dots\dots\dots 1p$$

$$b) T_{k+1} = C_8^k (\sqrt{y})^{8-k} \left(\frac{1}{2y^4} \right)^k = C_8^k y^{\frac{8-k}{2}} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot y^{-\frac{k}{4}} = C_8^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot y^{\frac{16-3k}{4}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{16-3k}{4} \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0, 4\} \text{ iar termenii } T_1, T_5 \dots\dots\dots 2p$$

3. Trei muncitori realizează împreună 2064 de piese. Primul muncitor realizează 140% din cantitatea pe care o realizează al doilea muncitor, iar 60% din cât realizează al doilea muncitor este cu 15% mai mult decât 25% din cât realizează al treilea muncitor. Câte piese are de realizat fiecare muncitor ?

Soluție.

Notăm a, b, c numărul de piese realizat de primul, al doilea respectiv al treilea muncitor.

$$a + b + c = 2064 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = \frac{140}{100}b \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{60}{100}b = \frac{15}{100} \cdot \frac{25}{100}c + \frac{25}{100}c \dots\dots\dots 2p$$

$$a = \frac{7}{5}b; c = \frac{48}{23}b \Rightarrow \frac{7}{5}b + b + \frac{48}{23}b = 2064 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 644, b = 460, c = 960 \dots\dots\dots 2p$$

4. Să se rezolve pe domeniul maxim de definiție ecuațiile:

a) $\log_3(\log_4(x^2 - 17)) = 1$

b) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

Soluție.

a) Condițiile de existență $\begin{cases} x^2 - 17 > 0 \\ \log_4(x^2 - 17) > 0 \end{cases} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$$\Rightarrow x^2 - 17 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty) \dots\dots\dots 1p$$

Ecuția este echivalentă cu $x^2 - 17 = 64 \Rightarrow x = \pm 9 \dots\dots\dots 1p$

$$-9, 9 \in (-\infty, -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty) \dots\dots\dots 1p$$

a) Aducem ecuația la forma $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \dots\dots\dots 1p$

Notăm $3^x = t, t > 0 \dots\dots\dots 0,5p$

Rezolvăm ecuația $t^2 - 10t + 9 = 0 \dots\dots\dots 0,5p$

Soluțiile $x = 0$ sau $x = 2 \dots\dots\dots 1p$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



**ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016**

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. La o stație meteorologică sunt înregistrate temperaturile dimineața, la prânz și seara. S-a constatat că la prânz temperatura este cu 30% mai mare decât dimineața, iar seara se înregistrează o scădere cu 20% a temperaturii față de prânz. Se știe că diferența de temperatură dintre seară și dimineață este de un grad.
- Să se calculeze cele trei temperaturi măsurate.
 - Cu cât la sută s-a mărit temperatura seara față de dimineața.

Soluție.

Dacă x este temperatura de dimineață, la prânz va fi $\frac{13x}{10}$, iar cea de seara $\frac{26x}{25}$

..... 2p
 $x = 25^{\circ}C$ 1p
 Temperaturile vor fi: $25^{\circ}C$; $32,5^{\circ}C$ și respectiv $26^{\circ}C$ 2p
 Temperatura de seara este cu 4% mai mare decât dimineața 2p

2. Seria statistică următoare reprezintă numărul de tablete vândute de o firmă într-o lună, luând ca valori clasele ce reprezintă prețul lor în euro.

Preț (euro)	[40;80)	[80;120)	[120;160)	[160;200)	[200;240)	[240;280]
Număr de tablete	50	70	90	100	50	40

- Calculați prețul mediu al unei tablete vândute de firmă și aflați clasa mediană.
- În luna următoare numărul de tablete vândute crește sau scade cu același procent în fiecare clasă. Care sunt clasele cu creșteri de vânzări astfel încât numărul total de tablete vândute este același?

Soluție.

a) Prețul mediu este $m = (60 \cdot 50 + 100 \cdot 70 + 140 \cdot 90 + 180 \cdot 100 + 220 \cdot 50 + 260 \cdot 40) : 400 = 155$

..... 1p

Tabloul frecvențelor cumulate crescător este

Preț	[40;80)	[80;120)	[120;160)	[160;200)	[200;240)	[240;280]
Număr de tablete	50	70	90	100	50	40
Frecvența cumulată crescător	50	120	210	310	360	400

..... 1p
 Clasa mediană este intervalul [120;160) 1p
 b) Dacă $p\%$ este procentul de creștere sau descreștere,
 obținem $\frac{P}{100}(\pm 50 \pm 70 \pm 90 \pm 100 \pm 50 \pm 40) = 0$ 1p
 Convenabil este $+50 - 70 - 90 + 100 + 50 - 40 = 0$ sau $-50 + 70 + 90 - 100 - 50 + 40 = 0$
 2p
 Creșteri în prima, a patra și a cincea clasă sau în a doua, a treia și a șasea clasă 1p

3. Într-o regiune, fiecare dintre cele n orașe existente este legat în mod direct, prin căi ferate, de exact alte trei 3 orașe, astfel încât traseul minim ce pleacă dintr-un oraș A și se întoarce tot în A conține 4 legături directe.
 a) Determinați numărul minim de orașe care pot fi legate astfel.
 b) În condițiile problemei, este posibil să avem 9 orașe?

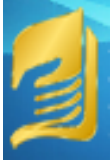
Soluție.

a) Asociem problemei graful G ale cărui vârfuri sunt cele n orașe și muchiile sunt legăturile directe de căi ferate.
 Dacă x_1 este vârf al lui G , notăm cu x_2, x_3, x_4 vârfurile adiacente cu el. Vârfurile x_2, x_3, x_4 nu sunt adiacente două câte două, altfel ar exista un ciclu elementar(traseu) de lungime 3 2p
 x_2 va fi adiacent și cu alte două orașe x_5 și x_6 1p
 x_3 și x_4 vor fi și ele adiacente cu x_5 și x_6 1p
 Numărul minim de orașe este 6 1p
 b) $3 \cdot 9 = 2m$, unde m este numărul de muchii 1p
 Nu este posibil 1p

4. Un graf-turneu este un graf orientat complet astfel încât între oricare două vârfuri distincte x și y există unul și numai unul dintre arcele (x, y) sau (y, x) . Pentru un graf-turneu cu n vârfuri x_1, x_2, \dots, x_n notăm cu r_i numărul arcelor care intră în x_i și cu s_i numărul arcelor care ies din x_i .
 a) Justificați că: $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
 b) Arătați că: $r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n$.

Soluție.

a) Un graf complet cu n vârfuri are $\frac{n(n-1)}{2}$ arce 1p
 Fiecare arc al grafului este numărat o dată ca arc de intrare într-un vârf și o dată ca arc de ieșire din alt vârf, deci sumele sunt egale cu numărul de arce ale grafului 1p
 b) Graful-turneu este complet, deci $r_i + s_i = n - 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$ 1p
 $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = (n-1-s_1)^2 + (n-1-s_2)^2 + \dots + (n-1-s_n)^2 = \dots$ 1p
 $= n(n-1)^2 - 2(n-1)(s_1 + s_2 + \dots + s_n) + s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2$ 1p
 $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)^2 = (s_1 + s_2 + \dots + s_n)^2$ 1p
 Deci, $r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



**ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016**

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XII-A**

1. Fie X o matrice pătratică de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, care verifică ecuația

$$X^2 + X - A = O_2, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Arătați că $X = A$ verifică ecuația din enunț.

b) Arătați că $(2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

c) Determinați toate soluțiile ecuației din enunț.

Soluție.

a) $X^2 = O_2$ 2p

Finalizare 1p

b) $X^2 + X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + 4X = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4X^2 + 4X + I_2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \dots\dots 2p$$

c) Notăm $2X + I_2 = Y$, de unde $Y^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Căutăm $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1p

$$Y = \begin{pmatrix} \pm 3 & \pm 8 \\ \mp 2 & \mp 5 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots 1p$$

2. Într-un sistem de axe carteziene xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ și

$$B_n \left(\frac{2n}{n^2 + 1}, \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

a) Determinați aria triunghiului OAB_1 .

b) Determinați ecuația dreptei AB_{-1} .

c) Pot fi coliniare punctele B_0, B_1, B_n ? Justificați răspunsul!

Soluție.

a) Aria este 1 2p

b) Ecuația dreptei este $2x - 3y + 2 = 0$ 2p

$$c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2n & n^2-1 & 1 \\ n^2+1 & n^2+1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2n^2-2n}{n^2+1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{2n(n-1)}{n^2+1} \neq 0, \text{ pentru orice } n \text{ num\u0103r \u00eentreg, } n \neq 0, n \neq 1 \dots\dots\dots 1p$$

Punctele B_0, B_1, B_n nu sunt coliniare $\dots\dots\dots 1p$

3. Pe mul\u021bimea numerelor reale consider\u0103m legea de compozi\u021bie asociativ\u0103 “ \circ ” definit\u0103 prin $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice x, y numere reale.

a) Determina\u021bi elementul neutru al acestei legi.

b) Ar\u0103ta\u021bi c\u0103 $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$.

c) Determina\u021bi numerele reale x care verific\u0103 ecua\u021bia $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = x^2 - 12x + 42$.

Solu\u021bie.

a) Dac\u0103 not\u0103m cu e elementul neutru, atunci avem $x \circ e = x$, pentru orice x num\u0103r real.

Ob\u021binem $e = 7 \dots\dots\dots 2p$

Verific\u0103m c\u0103 $7 \circ x = x$, pentru orice x num\u0103r real $\dots\dots\dots 1p$

b) Demonstr\u0103m prin induc\u021bie matematic\u0103 $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n = (x-6)^n + 6$, pentru orice num\u0103r \u00eentreg n ,

$n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$

c) De la punctul b) avem $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$. Ob\u021binem $(x-6)^{2016} = (x-6)^2 \dots\dots\dots 1p$

de unde $x_1 = 6, x_2 = 7$ \u0219i $x_3 = 5 \dots\dots\dots 1p$

4. Printre elementele unei matrice cu 4 linii \u0219i 4 coloane exist\u0103 4 litere, astfel \u00eenc\u0103t se afl\u0103 o singur\u0103 liter\u0103 pe fiecare linie, pe fiecare coloan\u0103 \u0219i pe fiecare dintre cele dou\u0103 diagonale. C\u0103te solu\u021bii exist\u0103, dac\u0103 cele 4 litere sunt identice? Dar dac\u0103 sunt diferite? Justifica\u021bi r\u0103spunsul!

Solu\u021bie.

Cu litere identice, plas\u0103m o liter\u0103 pe diagonala principal\u0103 a matricei. Din cele 4 elemente de pe diagonala secundar\u0103, unul este pe aceea\u0219i coloan\u0103 iar altul este pe aceea\u0219i linie cu litera plasata pe diagonal principal\u0103. A doua liter\u0103 poate fi plasat\u0103 \u00een locul unuia dintre celelalte dou\u0103 elemente. $\dots\dots\dots 2p$

Observ\u0103m c\u0103 ultimele 2 litere pot fi plasate ,de exemplu,cum este ar\u0103tat mai jos:

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & a \\ * & a & * & * \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

Din moment ce prima liter\u0103 poate fi unul din oricare cele 4 elemente de pe diagonala principal\u0103 \u0219i a doua oricare dintre cele 2 elemente de pe diagonala secundar\u0103, exist\u0103 $4 \cdot 2 = 8$ solu\u021bii $\dots\dots\dots 2p$

4 litere diferite duc la acelea\u0219i 8 alegeri de elemente, dar pentru oricare alegere exist\u0103 $P_4 = 24$ moduri pentru a pune literele. Deci exist\u0103 $8 \cdot 24 = 192$ solu\u021bii. $\dots\dots\dots 2p$