CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX -a

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+mx+2017,$ unde $m\in\mathbf{R}$

a) Determinaţi valoarea lui m ştiind că $f(-1),\ f(1)$ şi $f(2)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Dacă $f(1)=f(4),$ să se demonstreze că $f(2)=f(3)$.

c) Dacă m este un număr întreg impar, să se demonstreze că ecuaţia $f(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC, punctele M, N și P astfel încât: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ și Q mijlocul segmentului $[PM]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare.

c) Calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Problema 3.

a) Pentru $q\in\mathbb{R}$ se consideră numerele $a=q^2-q+1$ şi $b=q^2+q+1$. Să se demonstreze că $a\cdot b\geq 1$, oricare ar fi $q\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice crescătoare $(b_n)_{n\geq 1}$, având termeni pozitivi, ştiind că $b_1+b_2+b_3=7$ şi $b_1^2+b_2^2+b_3^2=21$ (utilizând, eventual, identitatea obţinută la punctul anterior).

Problema 4.

Patru persoane A, B, C, D au primit împreună pentru efectuarea unei lucrări suma de 2017 lei. Ştiind că A a primit cel mai mult, fiecare a primit mai mult de 100 de lei şi A împreună cu D au primit cu 537 de lei mai puţin decât B împreună cu C, să se determine ce sumă a primit A? (sumele primite sunt numere naturale)

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

Problema 1.

Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $2^x = 3$ şi $3^y = 4$.

a) Demonstraţi că $x \cdot y = 2$;

b) Demonstraţi că $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;

c) Demonstraţi că $y \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ şi deduceţi că $x > y$.

Problema 2.

a) Verificaţi egalitatea $a + a^2 + a^3 - 3 = (a-1)(a^2 + 2a + 3),\ \forall a \in \mathbb{R}$;

b) Rezolvaţi în R ecuaţia $2^x + 4^x + 8^x = 3$;

c) Să se rezolve ecuaţia $4\log_2 x + 8\log^2{}_4 x + 27\log_8^3 x = 24,\ x \in (0, \infty)$.

Problema 3.

Se consideră numărul complex $z = 1 + i\sqrt{3} + m\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Demonstraţi că $|z| = 2\sqrt{m^2 + m + 1}$;

b) Să se determine m astfel încât modulul numărului z să fie minim;

c) Dacă $z^3 \in \mathbb{R}$, demonstraţi că $z^3 = -8$.

Problema 4.

Doi fraţi au în proprietate comună un teren în forma trapezului *ABCD*. Ei hotărasc să împartă terenul în două părţi cu aceeaşi suprafaţă şi să le separe printr-un gard *MN*.

a) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor trapezului.

b) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi dispuse în altă poziţie pe cele doua baze?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ 18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}$.

Problema 2.

O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe se modifică în timp după legea: $T(t)=\sqrt{t^2+at+b}-ct+5,$ unde $a,b,c\in\mathbf{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}$ știind că $T(1)=7$ și $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8.$

b) Cu a,b,c astfel determinați, stabiliți dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0°.

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $A\in M_3(R)$.

a) Demonstrați că $A^2=6A$.

b) Determinați $a\in R$ astfel încât matricea $Y=aA-I_3$ să fie inversa matricei $X=A-I_3$.

c) Demonstrați că $I_3+A+A^2+A^3\ldots+A^{2017}=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}\cdot A+I_3$.

Problema 4.

Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&\sqrt{3}\end{pmatrix}\in M_2(R)$

Demonstrați că

a) $\det(A-xI_2)>0,\ \forall x\in\mathbf{R}$;

b) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)\in\mathbb{N}$;

c) Ecuația $X\cdot A-A\cdot X=A$ nu are soluții în $M_2(R)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*