CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x și $\{x\}$ este partea fracționară a lui x.

2. Fie triunghiul dreptunghic $ABC,\ m(\measuredangle A)=90°$. Se construiește perpendiculara în C pe cateta $[AC]$ pe care se consideră un punct C' astfel încât $[CC']\equiv[AC]$, iar pe perpendiculara în B pe cateta $[AB]$ se consideră punctul B', $[BB']\equiv[AB]$. Să se arate că dreptele BC', CB' și înălțimea AA' a ΔABC sunt concurente.

3. Fie șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$. Dacă $3(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n\cdot x_{n+1}$, $(\forall)n\geq 1$ și $x_n=ny_n$, arătați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

4. Un disc e împărțit în 6 părți egale prin 3 diametre. În fiecare dintre sectoarele formate se află câte un pion. La o mutare alegem doi pioni, pe care îi deplasăm în sectoare vecine celor din care pleacă. Există un șir finit de mutări în urma cărora toți pionii să ajungă într-un același sector? Justificați răspunsul.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. a) Determinați numărul: $N=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
b) Demonstrați că: $(log_a b+log_b a+2)(log_a b-log_{ab} b)\cdot log_b a-1=log_a b$.

2. a) Determinați parametrul real *m* pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-6x, & x\leq 3\\ mx+1, & x>3\end{cases}$ este inversabilă.
b) Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

3. a) Se dau numerele complexe $z_1=a+ib$ și $z_2=b+ia$, de modul 1. Să se demonstreze că $z_2=\frac{i}{z_1}$.
b) Un elev trebuie să înmulțească 2017 numere complexe de modul 1. Din greșeală, el schimbă între ele partea reală cu coeficientul părții imaginare, la fiecare factor al produsului și astfel obține ca rezultat final numărul $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Care trebuia să fie rezultatul corect al produsului celor 2017 numere complexe?

4. Se dau numerele reale $a,b,c>0$.
a) Demonstrați că dacă $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+ab}=\frac{1}{2}$, atunci $a^2b^2-a^2b-ab^2+a+b-1=0$.
b) Descompuneți în factori expresia $E(a,b)=a^2b^2-a^2b-ab^2+a+b-1$.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\frac{1}{1+2^x}+\frac{1}{1+3^x}-\frac{1}{1+6^x}=\frac{1}{2}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 24 februarie 2017
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Determinați constantele reale a, b, c, pentru care:
$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}-ax^2-bx-c\right)=0$

2. a) Fie ω o rădăcină a ecuației $x^2-x+1=0$. Calculați ω^3;

b) Calculați următoarea sumă de matrice: $\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} k(3k+1) & \frac{k}{(k+1)!} \\ 2^k & k\cdot(\omega^3-1) \end{pmatrix}$

3. Calculați limitele:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{x}$;

b) $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^2+6x-6)}{x-1}$;

c) $\lim_{x\to 0}x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]+\left[\frac{3}{x^2}\right]\right)$.

4. Calculați determinantul următor, scriind rezultatul sub formă de produs:
$D=\begin{vmatrix} sin^2x & cos^2x & sin2x \\ cos^2x & sin^2x & sin2x \\ 1+sin2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.