MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a IX –a

Problema 1.
Numerele reale x și y verifică ecuația $x^2+y^2-2x+6y+5=0$. Se cere:

a) Determinați aceste numere în condiția suplimentară $2x+y=4$.

b) Notând $2x+y=m$, $m\in\mathbb{R}$, arătați că $m\in[-6;4]$.

c) Determinați mulțimea $M=\{(x;\ y)/\ x,y\in\mathbb{Z};\ x^2+y^2-2x+6y+5=0\}$

Problema 2.
Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq1}$ definit prin $a_1=11$, $a_2=17$ și $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, respectiv șirul $(b_n)_{n\geq1}$, definit prin $b_n=a_{n+1}-a_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq1}$ este progresie aritmetică.

b) Determinați expresia termenului general al șirului $(b_n)_{n\geq1}$.

c) Demonstrați că $a_n=n^2+3n+7$, $n\in\mathbb{N}^*$.

d) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care a_n este pătrat perfect.

Problema 3.
Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și punctele $M\in(AC)$, $N\in(CE)$ încât $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=k$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Exprimați vectorii $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ și k.

c) Determinați valoarea k, pentru care punctele B, M și N sunt coliniare.

Problema 4.
Cercetări experimentale au arătat că solubilitatea în apă unei anumite cantități dintr-o anumită substanță S este dependentă de volumul de apă, măsurat în litri și de teperatura apei, măsurată în grade Celsius.
S-a stabilit că solubilitatea se exprimă printr-o lege de forma $T(t)=t^2+a\cdot t+b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $t\in[0;8]$, unde rezultatul reprezintă numărul de minute necesar dizolvării complete a 25 grame din substanța S într-un litru de apă aflată la temperatura t. Cunoscând $T(3)=6$ și $T(5)=14$, răspundeți la următoarele cerințe:

a) Justificați că $a=-4$ și $b=9$.

b) Determinați care este cea mai mică și care este cea mai mare valoare a solubilității substanței S.

c) Aflați pentru ce valori t ale temperaturii apei, substanța S are solubilitatea $T(t)\geq6$.

d) Determinați dacă există temperaturi diferite la care solubilitatea substanței S este aceeași.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a X –a

Problema 1.
Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\sqrt{\sqrt{21}-\sqrt{20}} < \sqrt{\sqrt{20}-\sqrt{19}}$.

b) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{1-\sqrt{2}} > 1$.

c) $\sin(1) > \cos^2(1)$.

Problema 2.
Fie z_1 și z_2 numere complexe distincte și astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$.

a) Arătați că z_1 și z_2 sunt ambele nenule.

b) Demonstrați că partea reală a numărului $\frac{z_1}{z_2}$, notată $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, este egală cu $-\frac{1}{2}$.

c) Demonstrați că $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 \in \mathbb{R}$.

d) Determinați rezultatul sumei $S = z_1^{2018} + z_1^{2017} \cdot z_2 + z_1^{2016} \cdot z_2^2 + \ldots + z_1^2 \cdot z_2^{2016} + z_1 \cdot z_2^{2017} + z_2^{2018}$.

Problema 3.
Se consideră $a, b \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$, $a > b$ și $A = \log_a(a-b)$, $B = \log_b(a-b)$.

a) Demonstrați că are loc implicația ”dacă $a^2 + b^2 = 3ab$, atunci $A + B = 2AB$”.

b) Stabiliți dacă reciproca, ”dacă $A + B = 2AB$, atunci $a^2 + b^2 = 3ab$”, este și ea adevărată.

Problema 4.
Un joc de calculator afișează pe monitor mulțimea de numere $M = \{1; 2; 3; \ldots; 100\}$ și la fiecare tastare a unui număr $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq 100$, dintre cele 100 numere ale mulțimii M, exact k dintre ele, alese la întâmplare de programul jocului, vor începe să clipească iar clipirea va continua până la următoarea tastare. Spre exemplu, dacă se tastează $k = 9$, pe monitor va apare un grup de 9 numere care clipesc iar dacă apoi se tastează $k = 92$ cele 9 numere se vor opri din clipit și pe monitor va apare un grup de 92 numere care clipesc.

a) Arătați că de fiecare dată când se tastează $k = 68$, printre cele 68 de numere care vor clipi, cel puțin trei vor fi consecutive.

b) Demonstrați că la o tastare $k = 67$ dacă pe monitor clipesc numerele $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < n_{i+1} < n_{i+2} < \ldots < n_{67}$ și pentru un caz $1 \leq i \leq 65$ se observă $n_{i+2} - n_i = 2$, atunci printre cele 67 numere care clipesc, cel puțin trei sunt consecutive.

c) Arătați că este posibilă o tastare $k = 67$, la care printre cele 67 numere care clipesc să nu se găsească trei numere consecutive.

d) Dacă la o tastare $k = 67$ pe monitor clipesc numerele $n_1 < n_2 < \ldots < n_{66} < n_{67}$, cu $n_{66} = 98$ și fără a conține trei numere consecutive, determinați celelalte numere care clipesc.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a XI –a

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

a) Arătați că ecuația $f(x)=2018$ are toate soluțiile reale.

b) Demonstrați că $f(x)\geq\dfrac{4x+16}{9}$, pentru orice x din intervalul $(1;+\infty)$.

c) Dacă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție încât $4x+16\leq 9g(x)\leq 9f(x)$, $(\forall)\ x>1$, demonstrați că g este continuă în $x_0=2$.

Problema 2.

Fie în $M_2(\mathbb{R})$ matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{aA+bI_2 \,/\, a,b\in\mathbb{Q}\}$.

a) Arătați că $A^2-A+I_2=O_2$.

b) Calculați A^{2018}.

c) Dacă $B\in M_2(\mathbb{Q})$ și $AB=BA$, arătați că $B\in G$.

d) Demonstrați că singura matrice neinversabilă din mulțimea G este matricea nulă.

Problema 3.

Fie a, b, c numere reale distincte și matricea $A=\begin{pmatrix}bc & a & 1\\ ca & b & 1\\ ab & c & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=(c-b)(c-a)(a-b)$.

b) Demonstrați că A este matrice inversabilă și calculați suma elementelor matricei A^{-1}.

c) Dacă a, b, c sunt numere naturale distincte, considerând punctele $M(a;bc)$, $N(b;ca)$, $P(c;ab)$ și $S(MNP)$ aria triunghiului MNP, demonstrați că $S(MNP)\geq 1$.

Problema 4.

Un utilaj al unei fabrici de ambalaje confectionează în mod automat cutii din carton de forma unor paralelipipede dreptunghice, cu dimensiuni și capacități alese după dorința clientului. Determinați cele trei dimensiuni ale unor astfel de cutii, confecționate la comanda clientului, în fiecare din următoarele situații:

a) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt în progresie *geometrică* cu rația 2 și cutia astfel confecționată are capacitatea de 8 litri.

b) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt în progresie *aritmetică* cu rația 2 și cutia astfel confecționată are capacitatea de 480 litri.

c) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt astfel alese încât cutia să aibă capacitatea de 27 litri și preț minim, știind că prețul unei cutii este direct proporțional cu aria suprafeței ei totale.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Clasa a XII -a

Problema 1.

Considerăm funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}$.

a) Arătați că toate primitivele funcției f sunt crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Demonstrați că $f(x)+f(-x)=\cos x$, pentru orice $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Verificați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ **d)** Demonstrați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$ **e)** Calculați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

Problema 2.

Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a\le c$ și $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $b>a$. Pe mulțimea $G_{(a;b)}=(a;b)$ considerăm legea de compoziție notată ”$\circ$” și definită prin $x\circ y=(x-a)(y-a)+c$, $(\forall)x, y\in G_{(a;b)}$.

a) Arătați că ”$\circ$” este asociativă dacă și numai dacă $a=c$.

b) Demonstrați că structura $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ este grup dacă și numai dacă $a=c$ și $b=+\infty$.

c) În cazul $a=c$ și $b=+\infty$, grupurile $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ le notăm $(G_a;\circ)$. Demonstrați că $(G_a;\circ)$ sunt izomorfe.

Problema 3.

Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+X-1$ și rădăcinile sale x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că x_1, x_2, x_3 sunt nenule și calculați suma $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$.

b) Demonstrați că f are exact o singură rădăcină reală.

c) Dacă x_1 este rădăcina reală a polinomului f, arătați că $|x_2|=|x_3|<|x_1|$.

Problema 4.

Pe o reprezentare topografică, graficul funcției $f:[0;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in[0;1] \\ \frac{1}{x^3}, & \text{dacă } x\in(1;2]\end{cases}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ delimitează pe un reper cartezian ortogonal xOy o suprafață de teren, *numerele reprezentând, pe hartă, sute de metri*. Urmare a unei succesiuni, suprafața de teren s-a împărțit în mod egal la doi moștenitori. Aceasta s-a realizat prin construirea unui gard interior, după o dreaptă de ecuație $x=a$, cu $a\in[0;2]$, care a impărțit suprafața în două suprafețe de arii egale.

a) Demonstrați că aria suprafeței este egală cu $\frac{7}{8}$ și exprimați în hectare această arie.

b) Demonstrați că $a\in(0;1)$ și determinați numărul $a\in(0;1)$ cu proprietatea enunțată.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Numerele reale x și y verifică ecuația $x^2+y^2-2x+6y+5=0$. Se cere:

a) Determinați aceste numere în condiția suplimentară $2x+y=4$.

b) Notând $2x+y=m$, $m\in\mathbb{R}$, arătați că $m\in[-6;4]$.

c) Determinați mulțimea $M=\{(x;\ y)/\ x,y\in\mathbb{Z};\ x^2+y^2-2x+6y+5=0\}$

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y+5=0 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ y=4-2x \end{cases} \Rightarrow x=3$ 1p

și $y=-2$ 1p

b) $2x+y=m \Rightarrow y=m-2x \Rightarrow x^2+y^2-2x+6y+5=0$ devine $5x^2-2(2m+7)x+(m^2+6m+5)=0$

și având $x\in\mathbb{R}$, $\Rightarrow \Delta\geq 0$ 1p

Dar $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4(-m^2-2m+24)\geq 0$ 1p

Finalizare $m\in[-6;4]$ 1p

c) Conform cu b), din condiția cerută $2x+y=m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in[-6;4]\cap\mathbb{Z}$

și ecuația $5x^2-2(2m+7)x+(m^2+6m+5)=0$ are rădăcini $x_{1,2}\in\mathbb{Z}$, deci are Δ pătrat perfect,

$\Delta=4(m+6)(4-m)$, $\Rightarrow m\in\{-6;-5;-4;-1;2;3;4\}$, din care

$(x;y)\in\{(-1;-4);(0;-5);(-1;-2);(0;-1);(3;-4);(2;-1);(3;-2);(2;-5)\}$ 2p

<u>Soluție alternativă</u>:

$x^2+y^2-2x+6y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=5 \Leftrightarrow$ sau $\begin{cases} x-1=\pm1 \\ y+3=\pm2 \end{cases}$, sau $\begin{cases} x-1=\pm2 \\ y+3=\pm1 \end{cases}$ (1p)

din care $(x;y)\in\{(2;-1);(2;-5);(0;-1);(0;-5);(3;-2);(3;-4);(-1;-2);(-1;-4)\}$ (1p)

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.

Considerăm șirurul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 11$, $a_2 = 17$ și $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, respectiv șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n = a_{n+1} - a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

b) Determinați expresia termenului general al șirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

c) Demonstrați că $a_n = n^2 + 3n + 7$, $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a_n este pătrat perfect.

SOLUȚIE:

a) $b_{n+1} - b_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = (a_{n+1} - a_n + 2) - (a_{n+1} - a_n) = 2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$,

deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică de rație $r = 2$ 1p

și prim termen $b_1 = 6$ 1p

b) $b_n = b_1 + (n-1) r = ... = 2n + 4$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ 1p

c) $b_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 4 \Rightarrow b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} = a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k+4)$, urmând reducere telescopică

și sumă Gaus din care $a_n = n^2 + 3n + 7$ 3p

d) $n^2 + 3n + 7 = k^2$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2 + 3n + (7 - k^2) = 0 \Rightarrow \Delta = ... = 4k^2 - 19 = p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2k - p)(2k + p) = 19$, din care $k = 5$, $p = 9 \Rightarrow n = 3$ 1p

Soluție alternativă:

$$n^2 + 3n + 7 = k^2 \Leftrightarrow \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4} = k^2 \Leftrightarrow (2n+3)^2 - (2k)^2 = 19 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2n + 3 - 2k)(2n + 3 + 2k) = 19$, din care $\begin{cases} 2n + 3 - 2k = 1 \\ 2n + 3 + 2k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - k = -1 \\ n + k = 8 \end{cases}$, $n = 3$. (1p)

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

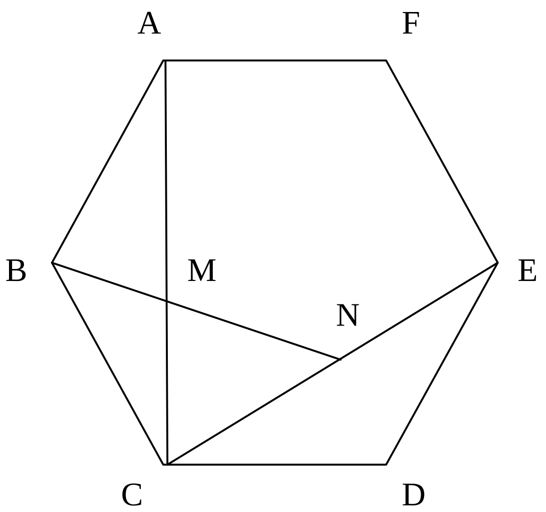
Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și punctele $M \in (AC)$, $N \in (CE)$ încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

b) Exprimați vectorii $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ și k.

c) Determinați valoarea k, pentru care punctele B, M și N sunt coliniare.

SOLUȚIE:



a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 2p

b) $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = ... = (k-1) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC}$ 2p

$\overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = ... = -2k \cdot \overrightarrow{AB} + (k+1) \cdot \overrightarrow{BC}$ 1p

c) B, M, N sunt coliniare $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BN}$ sunt coliniari, deci $\frac{k-1}{-2k} = \frac{k}{k+1}$ $\Rightarrow$ $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.
Cercetări experimentale au arătat că solubilitatea în apă unei anumite cantități dintr-o anumită substanță S este dependentă de volumul de apă, măsurat în litri și de teperatura apei, măsurată în grade Celsius.
S-a stabilit că solubilitatea se exprimă printr-o lege de forma $T(t)=t^2+a\cdot t+b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $t\in[0;8]$, unde rezultatul reprezintă numărul de minute necesar dizolvării complete a 25 grame din substanța S într-un litru de apă aflată la temperatura t. Cunoscând $T(3)=6$ și $T(5)=14$, răspundeți la următoarele cerințe:

- **a)** Justificați că $a=-4$ și $b=9$.
- **b)** Determinați care este cea mai mică și care este cea mai mare valoare a solubilității substanței S.
- **c)** Aflați pentru ce valori t ale temperaturii apei, substanța S are solubilitatea $T(t)\geq 6$.
- **d)** Determinați dacă există temperaturi diferite la care solubilitatea substanței S este aceeași.

SOLUȚIE:

a) $T(3)=6$, $T(5)=14$, $\Rightarrow$ $a=-4$, $b=9$ 2p

b) $T(t)=t^2-4t+9$, $t\in[0;8]$, T este descrescătoare pe $t\in[0;2]$ și crescătoare pe $t\in[2;8]$,

cu valoare minimă $T(2)=5$ și valoare maximă $T(8)=41$ 2p

c) $T(t)\geq 6 \Leftrightarrow t^2-4t+3\geq 0$, cu $t\in[0;8] \Rightarrow t\in[0;1]\cup[3;8]$ 2p

d) $T(t)=t^2-4t+9=(t-2)^2+5 \Rightarrow$ spre exemplu, $T(1)=T(3)$ 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.
Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\sqrt{\sqrt{21}-\sqrt{20}} < \sqrt{\sqrt{20}-\sqrt{19}}$.

b) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{1-\sqrt{2}} > 1$.

c) $\sin(1) > \cos^2(1)$.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{\sqrt{21}-\sqrt{20}} < \sqrt{\sqrt{20}-\sqrt{19}} \Leftrightarrow \sqrt{21}-\sqrt{20} < \sqrt{20}-\sqrt{19} \Leftrightarrow \sqrt{19}+\sqrt{21} < 2\sqrt{20}$ 1p

$\Leftrightarrow \sqrt{19\cdot 21} < 20 \Leftrightarrow 399 < 400$ 1p

b) $3-2\sqrt{2} \in (0;1)$, $1-2\sqrt{2} < 0$ 1p

$\Rightarrow \left(3-2\sqrt{2}\right)^{1-\sqrt{2}} > 1$ 1p

c) $1 > \frac{\pi}{4}$ și funcția "sin" fiind crescătoare pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1p

Funcția "cos" fiind descrescătoare pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1$ 1p

$\cos 1 > \cos^2 1 \Rightarrow \sin 1 > \cos^2 1$ 1p

Problema 2.
Fie z_1 și z_2 numere complexe distincte și astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$.

a) Arătați că z_1 și z_2 sunt ambele nenule.

b) Demonstrați că partea reală a numărului $\frac{z_1}{z_2}$, notată $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, este egală cu $-\frac{1}{2}$.

c) Demonstrați că $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 \in \mathbb{R}$.

d) Determinați rezultatul sumei $S = z_1^{2018} + z_1^{2017}\cdot z_2 + z_1^{2016}\cdot z_2^2 + \ldots + z_1^2\cdot z_2^{2016} + z_1\cdot z_2^{2017} + z_2^{2018}$.

SOLUȚIE:

a) Fie $z_1 \neq z_2$, cu $|z_1| = |z_2|$, $z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$, contradicție, deci z_1 și z_2 sunt ambele nenule. 1p

b) Notând $\frac{z_1}{z_2} = z$, avem $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow |z| = 1 = |z+1|$ 1p

$z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow a^2=(a+1)^2 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=-\frac{1}{2}$ 2p

c) $z=-\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3=...=1\in\mathbb{R}$ 2p

d) $S=z_1^{2018}+z_1^{2017}\cdot z_2+z_1^{2016}\cdot z_2^2+...+z_1^2\cdot z_2^{2016}+z_1\cdot z_2^{2017}+z_2^{2018}=z_2^{2018}\left(z^{2018}+z^{2017}+...+z+1\right)=$

$=z_2\cdot\frac{z^{2019}-1}{z-1}=z_2\cdot\frac{\left(z^3\right)^{673}-1}{z-1}=0$ 1p

Problema 3.

Se consideră $a,\ b\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$, $a>b$ și $A=\log_a(a-b)$, $B=\log_b(a-b)$.

a) Demonstrați că are loc implicația ”dacă $a^2+b^2=3ab$, atunci $A+B=2AB$”.

b) Stabiliți dacă reciproca, ”dacă $A+B=2AB$, atunci $a^2+b^2=3ab$”, este și ea adevărată.

SOLUȚIE:

a) Dacă $a-b=1$ atunci $A=B=0$ 1p

Dacă $a-b\neq 1$, $A=\frac{1}{\log_{a-b}a}$, $B=\frac{1}{\log_{a-b}b}$ 1p

$A+B=\frac{\log_{a-b}(a\cdot b)}{(\log_{a-b}a)(\log_{a-b}b)}$, $A\cdot B=\frac{1}{(\log_{a-b}a)(\log_{a-b}b)}$ 1p

și atunci $A+B=2AB \Leftrightarrow \log_{a-b}(a\cdot b)=2$ 1p

$\Leftrightarrow (a-b)^2=ab$ 1p

$\Leftrightarrow a^2+b^2=3ab$ 1p

b) Spre exemplu, cazul $a=3$ și $b=2$, alese încât $a-b=1$, $A=B=0$ și $A+B=2AB$,

în timp ce $a^2+b^2\neq 3ab$, deci reciproca este falsă. 1p

Problema 4.

Un joc de calculator afișează pe monitor mulțimea de numere $M=\{1;\ 2;\ 3;\ ...;100\}$ și la fiecare tastare a unui număr $k\in\mathbb{N}^*$, $k\leq 100$, dintre cele 100 numere ale mulțimii M, exact k dintre ele, alese la întâmplare de programul jocului, vor începe să clipească iar clipirea va continua până la următoarea tastare. Spre exemplu, dacă se tastează $k=9$, pe monitor va apare un grup de 9 numere care clipesc iar dacă apoi se tastează $k=92$ cele 9 numere se vor opri din clipit și pe monitor va apare un grup de 92 numere care clipesc.

a) Arătați că de fiecare dată când se tastează $k=68$, printre cele 68 de numere care vor clipi, cel puțin trei vor fi consecutive.

b) Demonstrați că la o tastare $k=67$ dacă pe monitor clipesc numerele $n_1<n_2<...<n_i<n_{i+1}<n_{i+2}<...<n_{67}$ și pentru un caz $1\leq i\leq 65$ se observă $n_{i+2}-n_i=2$, atunci printre cele 67 numere care clipesc, cel puțin trei sunt consecutive.

c) Arătați că este posibilă o tastare $k=67$, la care printre cele 67 numere care clipesc să nu se găsească trei numere consecutive.

d) Dacă la o tastare $k=67$ pe monitor clipesc numerele $n_1<n_2<...<n_{66}<n_{67}$, cu $n_{66}=98$ și fără a conține trei numere consecutive, determinați celelalte numere care clipesc.

SOLUȚIE:

a) Considerând că în succesiunea ordonată a celor 68 numere nu ar fi trei consecutive, înseamnă că între primul număr care clipește și ultimul număr care clipește ar fi cel puțin $68:2-1=33$ numere care nu clipesc, dar 68+33=101 numere $\Rightarrow$ contradicție cu totalul de 100 numere 2p

b) Având, pentru un caz $1 \le i \le 65$, $n_{i+2} - n_i = 2$ și considerând că printre cele 67 numere nu ar fi trei consecutive, în mod analog cu cazul precedent, în intervalul numerelor care clipesc nu ar clipi cel puțin $(66:2-1)+2=34$ numere, dar în acest caz am avea 67+34=101 numere, contradicție. 2p

c) Un exemplu este succesiunea $1;2;\_;4;5;\_;7;8;\_;10;11;\_\ldots\_;97;98;\_;100$ în care, dintre cele 100 numere nu clipesc cele divizibile prin 3. .... 1p

d) Conform cu b) $n_{i+2} - n_i \ge 3$, $(\forall) i \in \{1;2;...;67\}$

Astfel $n_3 - n_1 \ge 3$, $n_5 - n_3 \ge 3$, ..., $n_{67} - n_5 \ge 3$ și sumând se obține $n_{67} - n_1 \ge 99$, din care $n_1 = 1$ și toate inegalitățile sunt egalități, cu $n_1 = 1$, $n_3 = 4$, $n_5 = 7$, ..., $n_{67} = 100$ 1p

Analog $n_4 - n_2 \ge 3$, $n_6 - n_4 \ge 3$, ... , obținând $n_2 = 2$, $n_4 = 5$, $n_6 = 8$, ..., $n_{66} = 98$ 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

a) Arătați că ecuația $f(x)=2018$ are toate soluțiile reale.

b) Demonstrați că $f(x)\geq\dfrac{4x+16}{9}$, pentru orice x din intervalul $(1;+\infty)$.

c) Dacă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție încât $4x+16\leq 9g(x)\leq 9f(x)$, $(\forall)\ x>1$, demonstrați că g este continuă în $x_0=2$.

SOLUȚIE:

a) $f(x)=2018 \Leftrightarrow x^3-2018x^2+2018=0$ și considerând funcția $h(x)=x^3-2018x^2+2018$, aceasta este continuă, cu $h(-1)<0$, $h(1)>0$, $h(2)<0$ și $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=+\infty$, deci $x^3-2018x^2+2018=0$ are 3 rădăcini reale 2p

b) $f(x)\geq\dfrac{4x+16}{9} \Leftrightarrow 5x^3-16x^2+4x+16>0$, $x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow (x-2)^2(5x-4)>0$, $x\in(1;+\infty)$ care se confirmă 2p

c) $4x+16\leq 9g(x)\leq 9f(x) \Leftrightarrow \dfrac{4x+16}{9}\leq g(x)\leq f(x)$, $(\forall)\ x>1$.

Pentru $x=2$, $g(2)=\dfrac{8}{3}$ 1p

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+16}{9}=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{8}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}g(x)=\dfrac{8}{3}$ 1p

deci $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)$ 1p

Problema 2.

Fie în $M_2(\mathbb{R})$ matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{aA+bI_2 \,/\, a,b\in\mathbb{Q}\}$.

a) Arătați că $A^2-A+I_2=O_2$.

b) Calculați A^{2018}.

c) Dacă $B\in M_2(\mathbb{Q})$ și $AB=BA$, arătați că $B\in G$.

d) Demonstrați că singura matrice neinversabilă din mulțimea G este matricea nulă.

SOLUȚIE:

a) Verificare $A^2-A+I_2=O_2$ 1p

b) $A\left(A^2-A+I_2\right)=A^3-\left(A^2-A\right)=A^3+I_2=O_2 \Rightarrow A^3=-I_2$ 1p

$\Rightarrow A^{2018}=\left(A^3\right)^{672}\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ 1p

c) Fie $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, cu $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ și $AB=BA$

$\Rightarrow x=-3z+t,\ y=-3z$ 1p

$B=\begin{pmatrix}-3z+t & -3z\\ z & t\end{pmatrix}=-z\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}+(t-z)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ 2p

d) $X\in G \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2a+b & 3a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}$, cu $\det X=a^2+ab+b^2\neq 0,\ (\forall)a\cdot b\neq 0$, deci toate matricele nenule din G sunt inversabile. 1p

Problema 3.

Fie a, b, c numere reale distincte și matricea $A=\begin{pmatrix}bc & a & 1\\ ca & b & 1\\ ab & c & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=(c-b)(c-a)(a-b)$.

b) Demonstrați că A este matrice inversabilă și calculați suma elementelor matricei A^{-1}.

c) Dacă a, b, c sunt numere naturale distincte, considerând punctele $M(a;bc)$, $N(b;ca)$, $P(c;ab)$ și $S(MNP)$ aria triunghiului MNP, demonstrați că $S(MNP)\geq 1$.

SOLUȚIE:

a) Arată $\det A=(c-b)(c-a)(a-b)$,

fie aplicând proprietățile determinanților, fie prin calcul direct 2p

b) a, b, c fiind numere reale distincte $(c-b)(c-a)(a-b)\neq 0$, deci A este inversabilă 1p

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix},\ A^{-1}\cdot A=I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}bc & a & 1\\ ca & b & 1\\ ab & c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

În efectuarea produsului din primul membru, a treia coloană va fi $\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\ y_1+y_2+y_3\\ z_1+z_2+z_3\end{pmatrix}$ 1p

și identificând cu a treia coloană din I_3 suma elementelor matricei A^{-1} este 1. .... 1p

c) $S(MNP)=\frac{1}{2}\left|(c-b)(c-a)(a-b)\right|$ 1p

Numerele a, b, c fiind naturale distincte, cel puțin două sunt de aceeași paritate și având $\det A\neq 0$,

$\left|(c-b)(c-a)(a-b)\right|\geq 2 \Rightarrow S(MNP)\geq 1$ 1p

Problema 4.

Un utilaj al unei fabrici de ambalaje confectionează în mod automat cutii din carton de forma unor paralelipipede dreptunghice, cu dimensiuni și capacități alese după dorința clientului. Determinați cele trei dimensiuni ale unor astfel de cutii, confecționate la comanda clientului, în fiecare din următoarele situații:

a) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt în progresie *geometrică* cu rația 2 și cutia astfel confecționată are capacitatea de 8 litri.

b) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt în progresie *aritmetică* cu rația 2 și cutia astfel confecționată are capacitatea de 480 litri.

c) Dimensiunile cutiei, măsurate în decimetri, sunt astfel alese încât cutia să aibă capacitatea de 27 litri și preț minim, știind că prețul unei cutii este direct proporțional cu aria suprafeței ei totale.

SOLUȚIE:

Considerăm că $a \le b \le c$ sunt dimensiunile cutiei și atunci:

a) În condiția cerinței, avem $V = a \cdot b \cdot c = 8a^3 = 8$ litri, deci $a = 1dm$, $b = 2dm$, $c = 4dm$ 1p

b) În condiția cerinței avem $V = a \cdot b \cdot c = a \cdot (a+2) \cdot (a+4) = 480$ litri.. 1p

Alegând funcția $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x+2)(x+4)$, se arată că este strict crescătoare 1p

și cum $f(6) = 480$, cutia va avea dimensiunile $a = 6dm$, $b = 8dm$, $c = 10dm$ 1p

c) În condițiile cerute, avem de determinat $a \le b \le c$ cu $a \cdot b \cdot c = 27$ și $m = \min\limits_{a \cdot b \cdot c = 27} (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$ 1p

Avem $\sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^2} \le \dfrac{a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a}{3}$, cu egalitate $\Leftrightarrow$ $a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a$ 1p

și atunci $a = b = c = 3dm$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Considerăm funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}$.

a) Arătați că toate primitivele funcției f sunt crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Demonstrați că $f(x)+f(-x)=\cos x$, pentru orice $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Verificați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ **d)** Demonstrați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$ **e)** Calculați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

SOLUȚIE:

a) $F\in\int f(x)\,dx \Rightarrow F'(x)=f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}\ge 0\ (\forall)x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ 2p

b) $f(x)+f(-x)=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x\cos x}{1+e^x}=\cos x$ 1p

c) Substituție $x=-t \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ 1p

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos dx=2$ 1p

și cum $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$ 1p

e) Funcție impară $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=0$ 1p

Problema 2.

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le c$ și $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $b>a$. Pe mulțimea $G_{(a;b)}=(a;b)$ considerăm legea de compoziție notată "$\circ$" și definită prin $x\circ y=(x-a)(y-a)+c$, $(\forall)x,y\in G_{(a;b)}$.

a) Arătați că "$\circ$" este asociativă dacă și numai dacă $a=c$.

b) Demonstrați că structura $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ este grup dacă și numai dacă $a=c$ și $b=+\infty$.

c) În cazul $a=c$ și $b=+\infty$, grupurile $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ le notăm $(G_a;\circ)$. Demonstrați că $(G_a;\circ)$ sunt izomorfe.

SOLUȚIE:

a) Verifică prin dublă implicație sau pe etape:
Dacă $a=c$ verifică $\Rightarrow$ $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ 1p
Dacă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, obține $\Rightarrow a=c$ 1p

b) Conform cu a), structura $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ este asociativă $\Leftrightarrow$ $a=c$
și se obține element neutru $e=a+1$ 1p
Simetrizabilitatea obligă $x'=\dfrac{1}{x-a}+a$ 1p
$x'=\dfrac{1}{x-a}+a\in G_{(a;b)}=(a;b)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x-a}+a<b$, $(\forall)x\in(a;b)$
și cum $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\left(\dfrac{1}{x-a}+a\right)=+\infty$, $b=+\infty$ 1p

c) Avem $G_a=(a;+\infty)$ $(G_a;\circ)$, cu $x\circ y=(x-a)(y-a)+a$ $\Rightarrow$ $x\circ y-a=(x-a)(y-a)$ și considerând funcția $f:(a;+\infty)\to(0;+\infty)$, $f(t)=t-a$, aceasta este bijectivă și $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, deci grupurile $(G_a;\circ)$ sunt izomorfe cu $\left(\mathbb{R}_+^*;\cdot\right)$ 1p
și implicit sunt izomorfe 1p

Problema 3.
Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+X-1$ și rădăcinile sale x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că x_1, x_2, x_3 sunt nenule și calculați suma $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}$.

b) Demonstrați că f are exact o singură rădăcină reală.

c) Dacă x_1 este rădăcina reală a polinomului f, arătați că $|x_2|=|x_3|<|x_1|$

SOLUȚIE:

a) Cum $f(0)\neq 0$, x_1, x_2, x_3 sunt nenule 1p
$S=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}=\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}\right)$ 1p
și se obține $S=-3$ 1p

b) $S=-3<0$ $\Rightarrow$ f nu are toate rădăcinile reale 1p
Deoarece $f\in\mathbb{R}[X]$ nu are toate rădăcinile reale și grad $f=3$ $\Rightarrow$ f are o singură rădăcină reală și două rădăcini complexe nereale conjugate 1p

c) Considerând x_1 rădăcina reală a polinomului f și $x_2, x_3\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ rădăcinile sale complexe nereale, ele fiind conjugate, verifică $|x_2|=|x_3|$ 1p
Se verifică $f(1)\cdot f(2)<0$, deci $x_1\in(1;2)$, $x_{2,3}=a\pm ib$ $\Rightarrow$ $x_2\cdot x_3=a^2+b^2$,
dar $x_2\cdot x_3=\dfrac{1}{x_1}\in(0;1)$ $\Rightarrow$ $|x_2|=|x_3|<|x_1|$ 1p

Problema 4.

Pe o reprezentare topografică, graficul funcției $f:[0;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in[0;1] \\ \dfrac{1}{x^3}, & \text{dacă } x\in(1;2] \end{cases}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ delimitează pe un reper cartezian ortogonal xOy o suprafață de teren, *numerele reprezentând, pe hartă, sute de metri*. Urmare a unei succesiuni, suprafața de teren s-a împărțit în mod egal la doi moștenitori. Aceasta s-a realizat prin construirea unui gard interior, după o dreaptă de ecuație $x=a$, cu $a\in[0;2]$, care a impărțit suprafața în două suprafețe de arii egale.

a) Demonstrați că aria suprafeței este egală cu $\dfrac{7}{8}$ și exprimați în hectare această arie.

b) Demonstrați că $a\in(0;1)$ și determinați numărul $a\in(0;1)$ cu proprietatea enunțată.

SOLUȚIE:

a) Considerând A aria suprafeței de teren, $A=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 \dfrac{1}{x^3}dx=$ 1p

$=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{7}{8}$ 2p

b) Considerând A_1 și A_2 ariile celor două suprafețe separate de gard, $A_1=A_2=\dfrac{7}{16}$ 1p

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx$ și dacă $a\geq 1$ se obține $A_1=1-\dfrac{1}{2a^2}\geq 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{7}{16}$ 1p

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx$, cu $a\in(0;1)$, ... 1p

$A_1=\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{7}{16}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ 1p