MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Demonstrați că $\sqrt{x^2+8x+6\sqrt{x^2+8x-9}}<x+7,\ (\forall)x\geq 1.$

b) Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{1}{2018-2017x}\right]=\dfrac{1}{2018-2017[x]}$, (prin $[x]$, înțelegem partea întreagă a lui x).

Problema 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$. Știind că $f(1)=2018$ și că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)=n^2f(n)$, să se determine valoarea lui $f(2018)$.

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și un punct P situat în interiorul triunghiului. Fie triunghiurile echilaterale BPQ și BCR astfel încât punctele Q și A se află în semiplane diferite față de dreapta BP, iar punctele R și A se află în semiplane diferite față de dreapta BC. Să se demonstreze că:

a) $[QR]\equiv[PC]$;

b) $AR=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}A_{ABC}}$, unde $a=BC, b=AC, c=AB$ și A_{ABC} reprezintă aria triunghiului ABC.

c) Dacă $AP+BP+CP=AR$, atunci $m(\measuredangle APB)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Problema 4.

Într-o clasă, profesorul scrie pe tablă un număr natural nenul. Li se explică elevilor că pot șterge numărul scris pe tablă și îl pot înlocui cu un alt număr natural, chiar dacă s-a mai scris, determinat după regulile:

(*) în locul lui n scriem $3n+15$; (**) în locul lui n scriem $\sqrt{n+1}$.

a) Dacă pe tablă este scris numărul 6399, putem obține, după un număr finit de pași, numărul 2?

b) Dacă pe tablă este scris numărul 2, putem obține după un număr finit de pași, numărul 2025?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ 12 mai 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a X –a

Problema 1.

a) Câte funcţii injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ există?

b) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+\log_2 x+x$,

i) Demonstraţi că funcţia f este injectivă;

ii) Rezolvaţi inecuaţia: $f(x)\le 22$.

Problema 2.

Fie numărul a=$\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

a) Verificaţi relaţia $a^3=18a+108$

b) Arătaţi că $a\in\mathbb{Q}$

Problema 3.

Se consideră $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$,cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

a) Arătaţi că A=$(z_1+\overline{z_2})(z_2+\overline{z_3})(z_3+\overline{z_1})\in\mathbb{R}$

b) Dacă $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=4$,calculaţi $z_1+z_2+z_3$

c) Dacă $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$,calculaţi $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

Problema 4

Copiii dintr-o şcoală joacă un joc. Ei sunt aranjaţi într-un cerc si numerotaţi cu 1, 2,...,n.
Începând cu poziţia 2, fiecare al doilea copil este eliminat până rămâne o singură persoană, care câștigă.
Care este locul singurului câştigător?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XI -a

Problema 1.

Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătratice de ordin 3 care au ca elemente numere reale strict pozitive.

a) Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}$ conţine atât matrice inversabile, cât şi matrice neinversabile.

b) Demonstraţi că nu există nicio matrice inversabilă în $\mathcal{M}$ care să aibă ca inversă tot o matrice din $\mathcal{M}$.

Problema 2.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+3 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$. Pentru un număr natural dat n, determinaţi valoarea minimă a numărului $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge mulţimea numerelor reale.

Problema 3.

Spunem că funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ este *bună* dacă are proprietăţile (i), (ii) şi (iii):

(i) f este derivabilă;

(ii) $f(-2)\cdot f(2)>0$;

(iii) mulţimea $\mathrm{A}=\{x\in(-2,2) \mid f(x)=0\}$ are cardinalul egal cu 3.

a) Daţi un exemplu de funcţie bună, scriind legea sa de corespondenţă.

b) Demonstraţi că orice funcţie bună f are un punct de extrem local care aparţine mulţimii A.

Problema 4.

Laturile OA şi OB ale unghiului drept $\sphericalangle AOB$ reprezintă două şosele în deşert. În punctul P, interior unghiului $\sphericalangle AOB$, există o oază; distanţa de la P la dreapta OA este de 1 km, iar distanţa de la P la dreapta OB este de 8 km. Dorim să construim o şosea rectilinie, care să treacă prin P, unind punctele M de pe semidreapta OA şi N de pe semidreapta OB. Determinaţi distanţele OM şi ON, astfel încât şoseaua (segmentul) MN să aibă lungime minimă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Problema 1.

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și submulțimea $N=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)\,\middle|\,X^2=O_2\right\}$.

a) Verificați că $O_2\in N, A\in N$ și $I_2\notin N$.

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Dacă $B\in N, B=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$, arătați că $\mathrm{Tr}B=\hat{0}$ și $\det B=\hat{0}$ (unde $\mathrm{Tr}B=\hat{a}+\hat{d}$ și $\det B=\hat{a}\cdot\hat{d}-\hat{b}\cdot\hat{c}$).

d) Aflați cardinalul mulțimii *N*.

e) Găsiți o matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care nu se poate scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea *N*.

Problema 2.

Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$.

Demonstrați $f(n)\neq 31$, oricare ar fi numărul întreg *n*.

Problema 3.

a) Să se arate că $\int_{-1}^{1}\ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\ln\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\ln\left(x^4+x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Problema 4.

Teodor amenajează un loc de joacă pentru hamsterul său, în forma unui triunghi isoscel ABC cu vârful A fixat, iar vârfurile B, C variabile astfel încât $AB=AC=1, BC=2x, x\in(0,1)$. În interiorul triunghiului ABC Teodor plasează, într-un punct I aflat la egală distanță de laturi, un mic rezervor cu apă pentru hamster. Notăm cu r distanța de la I la cele trei laturi ale triunghiului ABC. Aflați valoarea maximă posibilă a numărului r.

(Toate distanțele din problemă sunt măsurate în metri).

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Demonstrați că $\sqrt{x^2+8x+6\sqrt{x^2+8x-9}}<x+7,\ (\forall)x\geq 1.$

b) Rezolvați ecuația $\left[\frac{1}{2018-2017x}\right]=\frac{1}{2018-2017[x]},$ (prin $[x]$, înțelegem partea întreagă a lui x).

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{x^2+8x-9+6\sqrt{x^2+8x-9}+9}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+8x-9}+3\right)^2}=\left|\sqrt{x^2+8x-9}+3\right|$ 2p

$\left|\sqrt{x^2+8x-9}+3\right|\leq\left|\sqrt{x^2+8x-9}\right|+|3|=\sqrt{(x+9)(x-1)}+3\underbrace{<}_{\substack{ineg\ mediilor\\ x+9\neq x-1}}\frac{x+9+x-1}{2}+3=x+7$......................1p

b) $\left[\frac{1}{2018-2017x}\right]=\frac{1}{2018-2017[x]}=\alpha$. Obținem că $[x]=\frac{2018\alpha-1}{2017\alpha}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\alpha=1$ 1p

$\alpha=1\Rightarrow[x]=1\Rightarrow x\in[1,2)$ 1p

Dar $\left[\frac{1}{2018-2017x}\right]=1\Rightarrow 1\leq\frac{1}{2018-2017x}<2\Rightarrow x\in\left[1,\frac{4035}{4034}\right)$ 1p

Obținem $x\in[1,2)\cap\left[1,\frac{4035}{4034}\right)=\left[1,\frac{4035}{4034}\right)$ 1p

Problema 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$. Știind că $f(1)=2018$ și că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)=n^2f(n)$, să se determine valoarea lui $f(2018)$.

SOLUȚIE:

$(\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ f(n+1)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)+f(n+1)-\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$ 1p

$f(n+1)=(n+1)^2f(n+1)-n^2f(n)\Rightarrow f(n+1)=\frac{n}{n+2}\cdot f(n)$ 2p

Se demonstrează prin inducție că $f(n)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot f(1),\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$. 3p

$f(2018)=\frac{2}{2019}$ 1p

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și un punct P situat în interiorul triunghiului. Fie triunghiurile echilaterale BPQ și BCR astfel încât punctele Q și A se află în semiplane diferite față de dreapta BP, iar punctele R și A se află în semiplane diferite față de dreapta BC. Să se demonstreze că:

a) $[QR]\equiv[PC]$;

b) $AR=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}A_{ABC}}$, unde $a=BC, b=AC, c=AB$ și A_{ABC} reprezintă aria triunghiului ABC.

c) Dacă $AP+BP+CP=AR,$ atunci $m(\measuredangle APB)=\frac{2\pi}{3}.$

SOLUȚIE:

a) $m(\measuredangle PBC)=\frac{\pi}{3}-m(\measuredangle CBQ), m(\measuredangle QBR)=\frac{\pi}{3}-m(\measuredangle CBQ)\Rightarrow \measuredangle PBC\equiv\measuredangle QBR$ 1p

$\triangle QBR\equiv\triangle PBC(LUL)\Rightarrow[QR]\equiv[PC]$ 1p

b) $AR^2=AB^2+BR^2-2AB\cdot BR\cdot\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=c^2+a^2-2ac\left(\frac{1}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=$

$=c^2+a^2-ac\cos B+\sqrt{3}ac\sin B$ 1p

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, ac\sin B=2A_{ABC}$ 1p

Finalizare 1p

c) $AP+BP+CP=AP+PQ+QR\Rightarrow AP+PQ+QR=AR,$ deci A,P,Q,R sunt coliniare, $P\in(AQ)$. 1p

$m(\text{R}APB)=m(\text{R}APQ)-m(\text{R}BPQ)=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ 1p

Problema 4.

Într-o clasă, profesorul scrie pe tablă un număr natural nenul. Li se explică elevilor că pot șterge numărul scris pe tablă și îl pot înlocui cu un alt număr natural, chiar dacă s-a mai scris, determinat după regulile:

(*) în locul lui n scriem $3n+15$; (**) în locul lui n scriem $\sqrt{n+1}$.

a) Dacă pe tablă este scris numărul 6399, putem obține, după un număr finit de pași, numărul 2?

b) Dacă pe tablă este scris numărul 2, putem obține după un număr finit de pași, numărul 2025?

SOLUȚIE:

a) $6399\to\sqrt{6399+1}=80\to 3\cdot 80+15=255\to\sqrt{255+1}=16\to 3\cdot 16+15=63\to\sqrt{63+1}=8\to$

$\sqrt{8+1}=3\to\sqrt{3+1}=2,$ deci este posibil să obținem 2 .... 3p

b) $2=4k+2,$ iar $3=4k+3\neq p.p.$, deci putem aplica doar regula (*) 1p

Obținem că $3\cdot(4k+2)+15=12k+21=4k_1+1$, iar $3(4k_1+1)+15=12k_1+18=4k_2+2.$ Cum

$4k_1+1+1=4k_1+2\neq p.p., 4k_2+2+1=4k_2+3\neq p.p.$ nu putem obține niciodată $2025=45^2$ folosind (**) 2p

Analizăm regula (*):

$2\to 3\cdot 2+15=21\to 3\cdot 21+15=78\to 3\cdot 78+15=249\to 3\cdot 249+15=762\to 3\cdot 762+15=2301>2025.$ Deci, nu putem obține niciodată 2025 .... 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X –a

Problema 1.

a) Câte funcţii injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ există?

b) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+\log_2 x+x$,

i) Demonstraţi că funcţia f este injectivă;

ii) Rezolvaţi inecuaţia: $f(x)\le 22$.

SOLUŢIE:

a) $A_{10}^4=5040$ 2p

b) f este funcţie strict crescătoare, deci f este injectivă 2p

c) $22=f(4)\Rightarrow f(x)\le f(4)$ 1p

f este funcţie strict crescătoare, de unde $x\in(0,4)$ 2p

Problema 2.

Fie numărul a= $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

a) Verificaţi relaţia $a^3=18a+108$

b) Arătaţi că a$\in\mathbb{Q}$

SOLUŢIE:

a) verificarea relaţiei............ 3p

b) $a^3-18a-108=0 \Leftrightarrow (a-6)(a^2+6a+18)=0$ 2p

$a^2+6a+18=(a+3)^2+9>0\ \forall a\in\mathbb{R}$ 1p

$a=6$ soluţie raţională unică 1p

Problema 3.

Se consideră $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$,cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

a) Arătaţi că A=$(z_1+\overline{z_2})(z_2+\overline{z_3})(z_3+\overline{z_1})\in\mathbb{R}$

b) Dacă $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=4$,calculaţi $z_1+z_2+z_3$

c) Dacă $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$,calculaţi $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

SOLUŢIE:

a) $A=\overline{A}\Rightarrow A\in\mathbb{R}$ 2p

b) $z_1 + z_2 + z_3 = 4$ 1p

c) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$ 1p

$| z_1 + z_2 + z_3 |^2 = 2 | z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 |$ 1p

$| z_1 + z_2 + z_3 | = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = | z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 |$ 1p

$| z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 | = 2$ 1p

Problema 4

Copiii dintr-o şcoală joacă un joc. Ei sunt aranjaţi într-un cerc si numerotaţi cu 1, 2,...,n.
Începând cu poziţia 2, fiecare al doilea copil este eliminat până rămâne o singură persoană, care câştigă.
Care este locul singurului câştigător?

SOLUŢIE:

Se disting două cazuri: n=2^k si n=2^k+t , $1 \le t \le 2^k - 1$ 1p

Cazul I

Dacă n=2^k, $k \in \mathbb{N}^*$,atunci sunt eliminaţi, în această ordine, copiii de pe locurile 2, 4,6,..., 2^k 1p

3,7,11, .., 5, 9,13,...,... .... 1p

deci câştigă primul copil.. 1p

Cazul II

Daca $n = 2^k + t, 1 \le t \le 2^k - 1$,atunci sunt eliminaţi, în această ordine, copiii de pe locurile 2,4,6,... 2^k ....
(toate poziţiile pare).. 1p

Apoi pentru *t* impar sunt eliminaţi copiii de pe locurile 1,5,9,....șamd.

Iar pentru *t* par sunt eliminaţi copiii de pe locurile 3,7,11,....șamd. 1p

Va câştiga jocul copilul de pe poziţia 2t+1... 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătratice de ordin 3 care au ca elemente numere reale strict pozitive.

a) Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}$ conţine atât matrice inversabile, cât şi matrice neinversabile.

b) Demonstraţi că nu există nicio matrice inversabilă în $\mathcal{M}$ care să aibă ca inversă tot o matrice din $\mathcal{M}$.

SOLUŢIE:

a) De exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este matrice inversabilă, iar $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este neinversabilă. 4p

b) Presupunem, prin absurd, că există două matrice A, B din $\mathcal{M}$, una inversa celeilalte.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \dots & m & \dots \\ \dots & n & \dots \\ \dots & p & \dots \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} \dots & am+bn+cp & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = I_3$.

Obţinem că $am+bn+cp=0$, contradicţie (cantitatea din stânga este strict pozitivă). 3p

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Pentru un număr natural dat n, determinaţi valoarea minimă a numărului $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge mulţimea numerelor reale.

SOLUŢIE:

Avem: $\det\left(A^n\right) = (\det A)^n = \left(x^2+2x\right)^n$. 1p

Imaginea funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2+2x$ este intervalul $[-1,\infty)$. 2p

Dacă n este par, mulţimea valorilor expresiei $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge $\mathbb{R}$, este $[0,\infty)$. Valoarea minimă a expresiei este 0 şi se atinge pentru $x \in \{-2, 0\}$. 2p

Dacă n este impar, mulţimea valorilor expresiei $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge $\mathbb{R}$, este $[-1,\infty)$. Valoarea minimă a expresiei este -1 şi se atinge pentru $x=-1$. 2p

Problema 3.

Spunem că funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ este *bună* dacă are proprietăţile (i), (ii) şi (iii):

(i) *f* este derivabilă;

(ii) $f(-2)\cdot f(2)>0$;

(iii) mulţimea $A=\{x\in(-2,2) \mid f(x)=0\}$ are cardinalul egal cu 3.

a) Daţi un exemplu de funcţie bună, scriind legea sa de corespondenţă.

b) Demonstraţi că orice funcţie bună *f* are un punct de extrem local care aparţine mulţimii A.

SOLUŢIE:

a) De exemplu, se demonstrează că funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-2x^2$ este bună. 3p

b) Fie $A=\{a,b,c\}$, cu $-2<a<b<c<2$. Presupunem, prin reducere la absurd, că niciunul dintre elementele lui A nu este punct de extrem local pentru funcţia *f*. Rezultă că *f* îşi schimbă semnul de fiecare dată când trece printr-un zero. 2p

Avem: $f(-2)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f\left(\frac{b+c}{2}\right)<0, f\left(\frac{b+c}{2}\right)\cdot f(2)<0$. Înmulţind membru cu membru aceste relaţii, obţinem că $f(-2)\cdot f(2)\cdot f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f^2\left(\frac{b+c}{2}\right)<0$, contradicţie. 2p

Problema 4.

Laturile *OA* şi *OB* ale unghiului drept $\sphericalangle AOB$ reprezintă două şosele în deşert. În punctul *P*, interior unghiului $\sphericalangle AOB$, există o oază; distanţa de la *P* la dreapta *OA* este de 1 km, iar distanţa de la *P* la dreapta *OB* este de 8 km. Dorim să construim o şosea rectilinie, care să treacă prin *P*, unind punctele *M* de pe semidreapta *OA* şi *N* de pe semidreapta *OB*. Determinaţi distanţele *OM* şi *ON*, astfel încât şoseaua (segmentul) *MN* să aibă lungime minimă.

SOLUŢIE:

Notăm cu *S* şi *T* proiecţiile punctului *P* pe *OA*, respectiv *OB*; avem *OS* = *PT* = 8km şi *OT* = *PS* = 1km. Punctele *M*, *N* şi *P* fiind coliniare, triunghiurile *TNP* şi *SPM* sunt asemenea. Fie $NT=x$ (km); evident că $x>0$ şi obţinem că $MS=\frac{8}{x}$ (km).

Avem: $MN^2=OM^2+ON^2=$

$=\left(8+\frac{8}{x}\right)^2+(1+x)^2=(x+1)^2\left(1+\frac{64}{x^2}\right)$. 3p

Pentru a minimiza lungimea segmentului *MN*, trebuie să determinăm punctul de minim al funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2\left(1+\frac{64}{x^2}\right)$. Cum *f* este derivabilă, $f'(x)=\frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$ pentru $x\in(0,\infty)$ şi $f'(x)<0,\forall x\in(0,4)$, $f'(4)=0$, $f'(x)>0,\forall x\in(4,\infty)$, rezultă că $x_0=4$ este unicul punct de minim al lui *f*.
.... 3p

Distanţele cerute sunt $ON=x+1=5$ km şi $OM=8+\frac{8}{x}=10$ km. 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și submulțimea $N=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)\middle| X^2=O_2\right\}$.

a) Verificați că $O_2\in N, A\in N$ și $I_2\notin N$.

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Dacă $B\in N, B=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$, arătați că $\mathrm{Tr}B=\hat{0}$ și $\det B=\hat{0}$ (unde $\mathrm{Tr}B=\hat{a}+\hat{d}$ și $\det B=\hat{a}\cdot\widehat{d}-\widehat{b}\cdot\hat{c}$).

d) Aflați cardinalul mulțimii *N*.

e) Găsiţi o matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care nu se poate scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea *N*.

SOLUŢIE:

a) $O_2^2=O_2, A^2=O_2, I_2^2=I_2\neq O_2$. 3p

b) $\mathrm{Card}\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)=2^4=16$. 1p

c) $B^2=\begin{pmatrix}\hat{a}^2+\hat{b}\cdot\hat{c} & \hat{b}\cdot(\hat{a}+\hat{d})\\ \hat{c}\cdot(\hat{a}+\hat{d}) & \hat{d}^2+\hat{b}\cdot\hat{c}\end{pmatrix}; B^2=O_2\Rightarrow(\det B)^2=\hat{0}\Rightarrow\det B=\hat{a}\cdot\hat{d}-\hat{b}\cdot\hat{c}=\hat{0}$.

Dacă, prin absurd, $\mathrm{Tr}B=\hat{a}+\hat{d}\neq\hat{0}\Rightarrow\hat{b}=\hat{c}=\hat{0}$ și $\hat{a}=\hat{d}=\hat{0}$, contradicție. 1p

d) $\mathrm{Card}\,N=4$. 1p

e) Orice element din *N* are urma egală cu $\hat{0}$, deci o sumă finită de elemente din *N* are aceeași proprietate. Matricea $X=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ satisface cerința, deoarece $\mathrm{Tr}X=\hat{1}$. 1p

Problema 2.

Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$. Demonstrați $f(n)\neq 31$, oricare ar fi numărul întreg *n*.

SOLUŢIE:

$f-1=(X-1)\cdot(X-2)\cdot(X-3)\cdot(X-4)\cdot g$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$. 3p

Dacă, prin absurd, ar exista $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(n) = 31$, obținem $30 = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot g(n)$.
.... 2p
Ultima identitate este imposibilă, deoarece în membrul drept avem produsul a patru numere întregi consecutive, deci un multiplu de 8, iar 30 nu este multiplu de 8. .... 2p

Problema 3.

a) Să se arate că $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^4+x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

(Gazeta Matematică 2/2018)

SOLUȚIE:

a) Folosim schimbarea de variabilă $x = -t$. 3p

b) $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^4+x^2+1\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(\left(x^2+1\right)^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x =$

$= \int_{-1}^{1} \left(\ln\left(x^2+x+1\right) + \ln\left(x^2-x+1\right)\right)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$. 2p

Integrând prin părți, obținem că $2\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x = 3\ln 3 - 8 + \pi\sqrt{3}$. ……………........................... 2p

Problema 4.

Teodor amenajează un loc de joacă pentru hamsterul său, în forma unui triunghi isoscel ABC cu vârful A fixat, iar vârfurile B, C variabile astfel încât $AB = AC = 1$, $BC = 2x$, $x \in (0,1)$. În interiorul triunghiului ABC Teodor plasează, într-un punct I aflat la egală distanță de laturi, un mic rezervor cu apă pentru hamster. Notăm cu r distanța de la I la cele trei laturi ale triunghiului ABC. Aflați valoarea maximă posibilă a numărului r.

(Toate distanțele din problemă sunt măsurate în metri).

SOLUȚIE:

Cum I este egal depărtat de laturile triunghiului ABC, rezultă că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și r este raza cercului înscris. 1p

$r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{p} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x} = x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 2p

Fie $f:(0,1) \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Deoarece $f'(x) = \left(-x^2-x+1\right)\cdot\frac{1}{-x^2+1}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \forall x \in (0,1)$, ... 1p

valoarea maximă a funcției f se obține pentru $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 2p

Maximul razei este $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$. 1p