MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că împărţind 9917 la n^2+n obţinem câtul 28 şi restul cel mai mare posibil.

b) Daţi două exemple de numere raţionale pozitive x, care să nu fie numere naturale, astfel încât $\frac{x}{2x-3}$ să fie număr natural.

Problema 2. Demonstraţi următoarele inegalităţi:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,\ (\forall)\, a,b \in (0,\infty)$;

b) $22 \leq \frac{\overline{ab}}{a}+\frac{\overline{ba}}{b} \leq \frac{262}{9}$, oricare ar fi cifrele nenule a şi b. În ce caz avem egalitate?

Problema 3. Se consideră triunghiul ΔABC în care $m(\measuredangle A)=90^\circ, m(\sphericalangle C)=30^\circ$, punctul D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul $E \in (AC)$ astfel încât $AC = 3 \cdot AE$. Să se demonstreze că:

a) ΔABD este echilateral;

b) $BE \perp AD$.

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC având medianele $(AM), (BN), (CP)$. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu vectorii :

a) $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$;

b) $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, unde $\{G\} = AM \cap BN \cap CP$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{1}{2\cdot x}\right)^n$, $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinaţi valoarea lui *n*, ştiind că suma coeficienţilor primilor trei termeni ai dezvoltării este cel mult egală cu 4.

b) Pentru $n=8$, determinaţi termenul care-l conţine pe x^{10}.

Problema 2. După fiecare an de utilizare, preţul unui autoturism scade cu 10% din valoarea avută la începutul anului.

a) Determinaţi preţul unui autoturism după trei ani de utilizare , ştiind că preţul de achiziţie a fost de 10000 de euro.

b) După câţi ani autoturismul pierde cel puţin 90% din valoarea iniţială ? (Se poate folosi $\lg 3=0,477$)

Problema 3. Într-un sistem de axe de coordonate xOy se consider punctele $A_n(n,1)$, $B_n(1,n)$ $n\in\mathbb{N}^*$ şi mulţimea $M=\{A_1,A_2,A_3,B_2,B_3\}$.

a) Câte drepte determină elementele mulţimii M ?

b) Câte triunghiuri determină elementele mulţimii M ?

c) Demonstraţi că punctele A_1,P,Q sunt coliniare, unde $\{P\}=A_2B_3\cap A_3B_2$ şi Q este mijlocul segmentului A_3B_3.

Problema 4. Să se determine $tg(x)$, ştiind că $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x+\cos x)\right]=\log_{a^2}(\sin x)+\log_{a^2}(\cos x)$, unde $a\in(1,\infty)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

Problema 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ dacă $CA = XC$.

c) Determinați matricea $X^n, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, unde X este matricea determinată la punctul **b)**.

Problema 2. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ cu $AB = BA$ și $\det(A) = 1$.

a) Demonstrați că $A^3 - B^3 = (A-B)(A-\varepsilon B)(A-\varepsilon^2 B)$ unde ε este o rădăcină cubică complexă de ordinul trei a unității.

b) Considerând $f(x) = \det(A + xB) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și $\det(A - \sqrt{7}B) = 8$, calculați $\det\left(A^3 - B^3\right)$.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că $\left(x^2+1\right) f''(x) f(x) = f'(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x} - x + a, a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f

c) Demonstrați că f este bijectivă și aflați a știind că $f^{-1}(-2) = 1$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII -a

Problema 1. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt, n \geq 0.$

a) Calculați $I_{3.}$

b) Demonstrați că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

c) Demonstrați că numărul $A = I_0 + I_2 + I_4 + ... + I_{2020}$ este irațional.

Problema 2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{Z}_4 \right\}, M \subset M_3(\mathbb{Z}_4)$, iar $\mathbb{Z}_4 = \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3} \right\}.$

a) Determinați numărul elementelor mulțimii M.

b) Demonstrați că oricare ar fi matricea $A \in M$, avem $A^2 = O_3$ sau $A^2 = I_3$.

c) Câte matrice din M au proprietatea că $A^2 = I_3$.? Scrieți aceste matrice.

Problema 3. Fie $f = X^3 - mX^2 + nX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați *m,n* dacă $x = -1$ este rădăcină dublă.

b) Demonstrați că, dacă *f* admite rădăcina $\sqrt{3}$ atunci *f* admite o rădăcină rațională. Determinați această rădăcină.

c) Fie $f(-2), f(1)$ cu numere impare. Demonstrați că *f* nu are rădăcini întregi.

Problema 4. Se consideră funcția $f : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+6}.$

a) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *f*, axa (*Ox*) și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 3$.

b) Determinați $m > 0,$ astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f(x+m)$ în jurul axei (*Ox*) să fie $\frac{2031\pi}{2}$.

c) Demonstrați că $\int_0^3 x^2 f(x)dx \leq 27.$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*