MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a IX –a

Problema 1. Un avion decolează de la Iaşi spre Roma şi se înalţă în zbor pentru primii 10 km parcurşi sub un unghi de 30^0 faţă de orizontală. Apoi se înalţă sub un unghi de 60^0 faţă de orizontală, până atinge altitudinea totală de 10 km. Determinați distanţa parcursă de la decolare până atinge altitudinea de 10 km. ($\sqrt{3}$ se aproximează cu 1,71).

Problema 2. Pe o tablă este scrisă secvența (a, b, c, d). La fiecare „pas”, secvența se schimbă în $(|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$ și tot așa(ex. (4,8,5,3,7) → (4,3,2,4,3) ...). Dacă se pornește cu secvența (1,1,1,1,0) determinați secvența după 2018 operații aritmetice.

Problema 3. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 1, m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie crescătoare pe $[0, \infty)$.

b) Determinaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f are valoarea minimă $\frac{1}{4}$.

c) Determinaţi valorile lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt numere întregi.

d) Să se determine valorile lui m pentru care $3x_1 - x_2 = 2$.

Problema 4. Fie ABC un triunghi.

a) Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ rămâne constant pentru orice punct M din exteriorul triunghiului.

b) Rămâne propoziţia adevărată pentru vectorul $\overrightarrow{v_M} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}$?

c) Determinaţi o relaţie între constantele $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{v_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ să rămână constant când punctul M variază în plan.

<u>***Notă:***</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a X –a

Problema 1. O bancă oferă o dobândă fixă de 10% la depozitele pe un an. Trei prieteni își duc economiile la bancă și se decid să depună împreună în același cont, aceeași sumă de bani, astfel că: primului îi rămâne 50% din suma pe care a economisit-o, celui de-al doilea 75% din suma pe care a economisit-o, iar celui de-al treilea 37.5% din suma pe care a economisit-o. După un an, al doilea prieten își retrage suma care i se cuvine, iar împreună cu suma rămasă după prima depunere face o depunere integrală la o altă bancă care oferă o dobândă de 20% la depozitele pe un an. După încă un an, cei trei decid să își retragă banii din bănci și constată următorul lucru: suma pe care o are al doilea este cu 125 de euro mai mică decât suma celorlalți doi la un loc cu tot cu economiile rămase de la prima depunere. Determinați economiile inițiale ale celor trei prieteni.(economiile rămase după prima depunere nu au fost modificate în timpul celor doi ani)

Problema 2. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ln\frac{(x-1)^2}{x^2-5x+6}$.

- **a)** Determinați domeniul maxim de definiție D.
- **b)** Definim șirul $(x_n)_{n\geq 4}, x_n = f(n)$. Demonstrați că $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = ln\left(\frac{(n+1)}{(n-2)^2} \cdot \frac{(n+2)^2}{(n-3)}\right)$
- **c)** Demonstrați că $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Problema 3. a) Rezolvați ecuația $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.

b) Rezolvați inecuația $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x-3)$.

Problema 4. Fie dreptele $(d_1): mx + (m+2)y + 6 = 0$ și $(d_2): (m-1)x + my + 3 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $d_1 \equiv d_2$.
- **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $d_1 \perp d_2$.
- **c)** Pentru $m = -\frac{1}{2}$ să se calculeze aria poligonului care are vârfurile $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_2 \cap Ox, \{C\} = d_1 \cap Oy, O$ –originea reperului.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a XI –a

Problema 1. Într-o localitate locuiesc 20000 de persoane cu ochi verzi, albaştri sau căprui. Nu toţi spun adevărul. 30% dintre cei cu ochi verzi spun că au ochi albaştri, 10% dintre cei cu ochi albaştri spun că au ochi verzi, iar 30% dintre cei cu ochi căprui spun că au ochi albaştri. Într-o zi, toţi locuitorii localităţii răspund la întrebarea „Ce culoare au ochii dumneavoastră?”, întrebare la care 60% dintre ei au spus că au ochi albaştri. Câţi locuitori cu ochi albaştri sunt în acea localitate?

Problema 2. La un concurs în care punctajele iau valori de la 0 la 100 au participat 24 elevi. Rezultatele concursului au fost grupate în următorul tabel:

Punctaje	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100]$
Nr. elevi				8	

a) Determinaţi frecvenţele absolute ale fiecărui interval de valori ştiind că sunt îndeplinite următoarele condiţii:
(i) numărul elevilor care au obţinut cel puţin 60 puncte reprezintă 50% din numărul total de participanţi.
(ii) frecvenţele absolute ale primelor patru intervale formează o progresie aritmetică de raţie 2.

b) Determinaţi mediana seriei statistice formată cu punctajele obţinute la concurs.

c) Arătaţi că: $2\cdot|Me-M|=|Me-Mo|$, unde M este valoarea medie a punctajelor obţinute, Me este mediana seriei statistice şi Mo este modulul(dominanta) seriei statistice.

Problema 3. a) Fie graful G cu vârfurile $x_1,x_2,...,x_n, n\geq 5$. Determinați numărul minim de muchii astfel încât graful să aibă trei puncte izolate.

b) La un concurs 78 elevi au fost repartizați în mod egal în 26 camere. Spunem că între două camere se poate stabili o *relație de bună colaborare* dacă cel puțin patru din elevii repartizați în ele sunt din același județ. Determinați numărul minim de *relații de bună colaborare* astfel încât trei camere să nu poată stabili *relații de bună colaborare* .

Problema 4. Între localitățile L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6 există drumurile directe $L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4, L_1L_5, L_2L_3, L_2L_4, L_3L_4, L_3L_5, L_3L_6, L_4L_5, L_5L_6$.

a) Câte drumuri mai trebuie construite astfel încât între oricare două localități să existe un drum direct?

b) Care este numărul minim de drumuri ce trebuie închise astfel încât pentru orice localitate $L_i, i=\overline{1,6}$, să **nu** se poată forma un circuit elementar, cu cel puțin trei localități, cu plecarea din L_i şi sosirea tot în L_i?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA 1918 2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a XII –a

Problema 1. Se consideră determinantul: $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 2-x & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1-x \end{vmatrix}$, x număr real.

a) Demonstrați că $\Delta(x) = (x-6)\cdot(x^2-3)$.

b) Dacă x și y sunt numere întregi, demonstrați că $\Delta(x)-\Delta(y)$ se divide prin $(x-y)$.

Problema 2. Se dă mulțimea $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in Z; x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$.

a) Demonstrați că mulțimea M conține cel puțin cinci elemente.

b) Demonstrați că pentru orice $A,\ B \in M$ rezultă că $A \cdot B \in M$.

Problema 3. Numim *cod* o matrice cu 3 linii și 3 coloane cu elementele numere întregi, de forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$, unde a, b, c, d, e, f sunt numere întregi având modulul 2.

a) Demonstrați că putem forma 64 *coduri*.

b) Dacă A este un *cod*, demonstrați că că det(A) $\in$ {-16, 0, 16}.

c) Claudiu și Oana completează un *cod*, înlocuind succesiv, oricare dintre literele a, b, c, d, e, f cu cifrele 2 sau -2. Oana este declarată câștigătoarea jocului dacă det(A) = 0. Claudiu începe jocul. Demonstrați că indiferent de alegerile făcute de Claudiu, Oana poate câștiga jocul.

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "$*$" prin $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, pentru orice x, y numere reale.

a) Demonstrați că legea este comutativă și asociativă.

b) Sorin alege numerele 8, -56, -6 și calculează $(x*y)*z$, unde (x, y, z) este o permutare a numerelor alese. Demonstrați că de fiecare dată Sorin obține același rezultat.

c) Pe tablă sunt scrise numerele: 0, 1, 2, 3,..., 10. Sorin alege, în mod arbitrar, dintre acestea, două numere a și b, le șterge, iar în locul doar unuia dintre ele scrie numărul $a*b$. Continuă procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*