

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"****ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii****Clasa a IX –a****Problema 1.**Calculați $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{2018}]$.**Problema 2.**Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax - 3a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \cdot y = 3(x + y)$, atunci $(x - 3)(y - 3) = 9$.
b) Știind că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sunt două numere întregi distincte, determinați valorile lui a .

Problema 3.În paralelogramul $ABCD$ se consideră $F \in [AB], M$ – mijlocul segmentului $[AD], N$ – mijlocul segmentului $[BC], G$ – mijlocul segmentului $[BM]$, iar $AF = 2FB$.

- a) Demonstrați că punctele D, G, F sunt coliniare.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$.

Problema 4.

La ora 6:00, din același depozit A, pleacă doi curieri către alte două depozite B și C, unde distanța de la A la B este egală cu distanța de la B la C și egală cu distanța de la A la C. Primul curier merge mai întâi la depozitul B, cu o viteză constantă x km/h, iar de la depozitul B la depozitul C merge cu o viteză de 3 ori mai mare. Al doilea curier merge mai întâi la depozitul C, cu o viteză constantă de 30 km/h, iar de la depozitul C la depozitul B merge cu o viteză constantă de $x + 42$ km/h. Știind că nici unul nu face pauză, iar ambii ajung la destinație la ora 9:00, determinați ora aproximativă la care s-au întâlnit cei doi curieri pe traseu.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"****ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii****Clasa a X –a****Problema 1.**

Studiind virusul gripal tip B, un cercetător a stabilit că acesta se răspândește după legea $f(t) = 1 - e^{-0,5t}$, unde $f(t)$ reprezintă procentul din populație care a venit în contact cu boala, iar t este numărul de săptămâni trecute de la semnalarea primului caz. În a câta săptămâna va fi infectată trei sferturi din populație?

Problema 2.

Fie numărul $a = \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$.

- Verificați relația $a^3 = 18a + 108$
- Arătați că $a \in \mathbb{Q}$

Problema 3.

Fie $x_i \in [10, 100]$, $i = \overline{1, 10}$.

Să se arate ca $(\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_{10})(\log_{x_1} 10 + \log_{x_2} 10 + \dots + \log_{x_{10}} 10) \leq 112,5$

Problema 4.

Se da funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

- Arătați ca f este periodică.
- Calculați $(1 - f(1)) \cdot (1 + f(2)) \cdot (1 - f(3)) \cdot \dots \cdot (1 + f(2018))$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"****ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii****Clasa a XI –a****Problema 1.**Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$.

- Demonstrați că $a \geq 0$.
- Pentru $a = 0$, trasați graficul funcției.
- Arătați că funcția f este continuă dacă și numai dacă este surjectivă.

Problema 2.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $XA = AX$.
- Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^3 = A$.

Problema 3.Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.**Problema 4.**Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu 1.

- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice B al cărei determinant să fie egal cu 0?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice C al cărei determinant să fie egal cu -1 ?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice D al cărei determinant să aibă o altă valoare decât 0, 1 sau -1 ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ 10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII –a

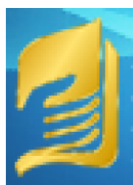
Problema 1.Pe mulțimea \mathbb{Z} construim legile de compoziție $*$ și \circ definite prin: $x * y = x + y - 3$ și

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, x, y \in \mathbb{Z}$$

a) Justificați că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ.b) Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2018 \text{ ori } x} = 2^{2018} + 3$.c) Să se afle $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = ax + b.$$

Problema 2.Fie M mulțimea secvențelor de 8 litere majuscule din alfabetul latin (care are 26 de litere: A, B, C, ..., Z).Definim pe M legea de compoziție $\#$ astfel: dacă $x = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \in M$ și $y = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \in M$,atunci $x \# y = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8$.a) Aflați cardinalul mulțimii M .b) Calculați (PARAGUAY $\#$ COLUMBIA) $\#$ BRAZILIAc) Cercetați dacă legea $\#$ este comutativă și dacă admite element neutru.**Problema 3.**a) Arătați că: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = \frac{1}{2} \arctg(e^{2x}) + C$ b) Aflați primitivele funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(1+e^x)^4}{1+e^{4x}}$ **Problema 4.**Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și F o primitivă a sa.Dacă $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ și $F(0) = 1$ să se afle f .Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX - a

Problema 1.

Calculați $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{2018}]$.

SOLUȚIE:

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2 \leq x < (k+1)^2 \Rightarrow k \leq \sqrt{x} < k+1 \Rightarrow \dots \dots \dots$ 1p
 $\Rightarrow [\sqrt{x}] = k, \forall x \in \{k^2, k^2+1, k^2+2, \dots, k^2+2k\} \dots \dots \dots$ 1p
 $\text{card}(\{k^2, k^2+1, k^2+2, \dots, k^2+2k\}) = 2k+1 \dots \dots \dots$ 1p
 $1936 = 44^2 < 2018 < 45^2 = 2025 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 44, \forall x \in \{1936, 1937, \dots, 2018\} \dots \dots \dots$ 1p
 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{2018}] = \sum_{k=1}^{43} k(2k+1) + 44(2018-1936+1) \dots \dots \dots$ 1p
 $= \sum_{k=1}^{43} (2k^2+k) + 3652 = 2 \sum_{k=1}^{43} k^2 + \sum_{k=1}^{43} k + 3652 \dots \dots \dots$ 1p
 $= 2 \cdot \frac{43 \cdot 44 \cdot 87}{6} + \frac{43 \cdot 44}{2} + 3652 = 54868 + 946 + 3652 = 59466 \dots \dots \dots$ 1p

Problema 2.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax - 3a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \cdot y = 3(x+y)$, atunci $(x-3)(y-3) = 9$.

b) Știind că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sunt două numere întregi distincte, determinați valorile lui a .

SOLUȚIE:

a) $x \cdot y = 3(x+y) \Rightarrow xy - 3x - 3y = 0 \dots \dots \dots$ 1p
 $(x-3)(y-3) = xy - 3x - 3y + 9 = 0 + 9 = 9 \dots \dots \dots$ 1p
b) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 < x_2$, cele două rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$.
Se scriu relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 = -a, x_1 \cdot x_2 = -3a \dots \dots \dots$ 1p
Se observă că $x_1 \cdot x_2 = 3(x_1 + x_2) \dots \dots \dots$ 1p
Folosind subpunctul a) se obține $(x_1-3)(x_2-3) = 9$. Cum $x_1-3 < x_2-3$ și $x_1-3, x_2-3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_1-3; x_2-3) \in \{(-9; -1), (1; 9)\} \Rightarrow (x_1; x_2) \in \{(-6; 2), (4; 12)\} \dots \dots \dots$ 2p
Prin urmare, $a \in \{-16; 4\} \dots \dots \dots$ 1p

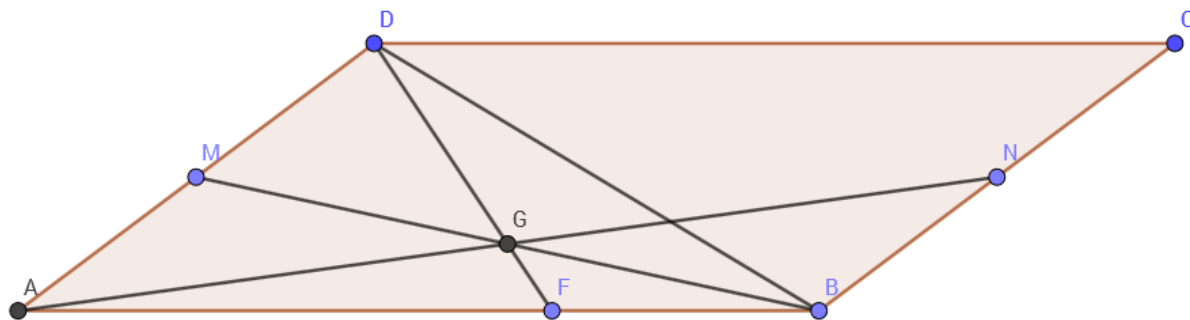
Problema 3.

În paralelogramul $ABCD$ se consideră $F \in [AB], M$ – mijlocul segmentului $[AD], N$ – mijlocul segmentului $[BC], G$ – mijlocul segmentului $[BM]$, iar $AF = 2FB$.

a) Demonstrați că punctele D, G, F sunt coliniare.

b) Demonstrați că $\vec{DG} = \frac{3}{4}\vec{DF}$.

SOLUȚIE:



- a) În $\triangle BAM$ calculăm $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AD}{DM} \cdot \frac{MG}{GB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$ 2p
 Conform Teoremei lui Menelaus, punctele F, G, D sunt coliniare 2p
 b) $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ 1p
 $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$ 2p

Problema 4.

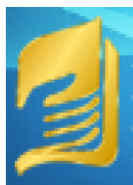
La ora 6:00, din același depozit A, pleacă doi curieri către alte două depozite B și C, unde distanța de la A la B este egală cu distanța de la B la C și egală cu distanța de la A la C. Primul curier merge mai întâi la depozitul B, cu o viteză constantă x km/h, iar de la depozitul B la depozitul C merge cu o viteză de 3 ori mai mare. Al doilea curier merge mai întâi la depozitul C, cu o viteză constantă de 30 km/h, iar de la depozitul C la depozitul B merge cu o viteză constantă de $x + 42$ km/h. Știind că nici unul nu face pauză, iar ambii ajung la destinație la ora 9:00, determinați ora aproximativă la care s-au întâlnit cei doi curieri pe traseu.

SOLUȚIE:

Notăm cu d , distanța dintre oricare două depozite.

- Avem că $\frac{d}{x} + \frac{d}{3x} = \frac{d}{30} + \frac{d}{x+42}$, adică $x = 28$ km/h 2p
 Primul curier va ajunge la depozitul B la ora 8:15 1p
 Al doilea curier va ajunge la depozitul C la ora 8:06 1p
 Distanța dintre două localități este 63 km 1p
 Notăm cu t , ora întâlnirii celor doi curieri. Obținem că $(t - 8\frac{1}{4}) \cdot 84 + (t - 8\frac{1}{10}) \cdot 70 = 63$ 1p
 Soluția ecuației este $t \cong 8.59$, adică ora întâlnirii celor doi curieri este 8:35 1p

Notă. Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X – a

Problema 1.

Studiind virusul gripal tip B, un cercetător a stabilit că acesta se răspândește după legea $f(t) = 1 - e^{-0,5t}$, unde $f(t)$ reprezintă procentul din populație care a venit în contact cu boala, iar t este numărul de săptămâni trecute de la semnalarea primului caz. În a câta săptămâna va fi infectată trei sferturi din populație?

SOLUȚIE:

$$\frac{3}{4} = 1 - e^{-0,5t} \Rightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 3p$$

$$-0,5t = \ln \frac{1}{4} \Rightarrow t = 4 \ln 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$t = \ln 16, \ln e^2 < \ln 16 < \ln e^3 \dots\dots\dots 1p$$

în a treia săptămâna 1p

Problema 2.

Fie numărul $a = \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$.

- a) Verificați relația $a^3 = 18a + 108$
- b) Arătați că $a \in \mathbb{Q}$

SOLUȚIE:

a) Verificarea relației 3p

b) $a^3 - 18a - 108 = 0 \Leftrightarrow (a - 6)(a^2 + 6a + 18) = 0 \dots\dots\dots 2p$

$a^2 + 6a + 18 = (a + 3)^2 + 9 > 0 \forall a \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

$a = 6$ soluție unică 1p

Problema 3.

Fie $x_i \in [10, 100], i = \overline{1, 10}$.

Să se arate ca $(\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_{10})(\log_{x_1} 10 + \log_{x_2} 10 + \dots + \log_{x_{10}} 10) \leq 112,5$

SOLUȚIE:

$x_i \in [10, 100] \Rightarrow \lg x_i \in [1, 2] \dots\dots\dots 1p$

funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^2 - 3t + 2, f(t) \leq 0$, deci $t + \frac{2}{t} \leq 3$ 2p

$\lg x_i + 2 \log_{x_i} 10 \leq 3, i = \overline{1, 10}$ 1p

daca $S_1 = \sum_1^{10} \lg x_i$ si $S_2 = \sum_1^{10} \log_{x_i} 10, S_1 + 2S_2 \leq 30, S_1 + 2S_2 \geq 2\sqrt{S_1 \cdot 2S_2}$ 2p

finalizare 1p

Problema 4.

Se da funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, f(n) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

a) Arătați ca f este periodică.

b) Calculați $(1 - f(1)) \cdot (1 + f(2)) \cdot (1 - f(3)) \cdot \dots \cdot (1 + f(2018))$

SOLUȚIE:

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^6 = 1$ 1p

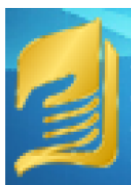
$f(n+6) = f(n), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ periodică 2p

b) Fie $f(1) = \alpha, \alpha^3 = -1, \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ 1p

$(1 - \alpha)(1 + \alpha^2)(1 - \alpha^3) \dots (1 + \alpha^{2018})$ 1p

$(-\alpha^2 \cdot \alpha \cdot 2)^{672} \cdot (-\alpha^2 \cdot \alpha)$.. 1p

finalizare 2^{672} 1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI - a

Problema 1.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$.

- Demonstrați că $a \geq 0$.
- Pentru $a = 0$, trasați graficul funcției.
- Arătați că funcția f este continuă dacă și numai dacă este surjectivă.

SOLUȚIE:

- Valoarea minimă a restricției funcției la intervalul $(-\infty, 1]$ este $f(-1) = a - 1$. Această valoare minimă trebuie să fie cel puțin egală cu -1 , prin urmare $a \geq 0$ 2p
- Graficul este format dintr-o semidreaptă și o porțiune de parabolă, care vor fi trasate. 2p
- Funcția f este continuă pe \mathbb{R} dacă și numai dacă este continuă în $x_0 = 1$, condiție care revine la faptul că $a = 0$. Pe de altă parte, f este surjectivă dacă și numai dacă $f(-1) = -1$, adică, din nou, $a = 0$ 3p

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

- Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $XA = AX$.
- Rezolvați în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^3 = A$.

SOLUȚIE:

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$; atunci $XA = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$ și $AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$.

Ipoteza $XA = AX$ este îndeplinită dacă și numai dacă $a = d$ și $b = c$, deci matricele căutate sunt cele de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$ 2p

b) Dacă $X^3 = A$, atunci $XA = X^4 = AX$, prin urmare X este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Obținem că $a^3 + 3ab^2 = 1$, $3a^2b + b^3 = 1$ 2p

Scăzând aceste două relații, deducem că $(a - b)^3 = 0$, prin urmare $a = b$ 1p

Atunci $a^3 = \frac{1}{4}$, de unde $a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon^2 \right\}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

În concluzie, găsim trei soluții ale ecuației matriceale. 2p

Problema 3.

Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUȚIE:

Observăm că $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, prin urmare dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției f 2p

Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, nu există asimptote orizontale la graficul funcției f 1p

Avem că:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$
, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 1} - x \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) + x (e^{\frac{1}{x}} - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = 0 + 1 = 1$$
; rezultă că dreapta de ecuație

$y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru graficul funcției f 2p

Analog se arată că dreapta de ecuație $y = -x - 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ pentru graficul funcției f .
..... 2p

Problema 4.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu 1.

- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice B al cărei determinant să fie egal cu 0?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice C al cărei determinant să fie egal cu -1 ?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice D al cărei determinant să aibă o altă valoare decât 0, 1 sau -1 ?

SOLUȚIE:

Notăm, ca de obicei, cu a_{ij} elementul din matricea A situat la intersecția liniei i cu coloana j .

a) Da: schimbăm între ele elementele a_{12} și a_{22} 2p

b) Da: schimbăm între ele elementele a_{11} și a_{31} 2p

c) Nu: dacă cele două zerouri sunt pe aceeași linie sau pe aceeași coloană, determinantul matricei D va fi egal cu 0 (vor exista două linii/coloane identice); dacă cele două zerouri se află pe linii și coloane diferite, determinantul matricei D va fi egal cu 1 sau -1 (în dezvoltarea determinantului, trei dintre cele șase produse vor fi egale cu 0, iar celelalte trei vor fi egale cu 1 și nu pot avea toate trei același semn). 3p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Pe mulțimea \mathbb{Z} construim legile de compoziție $*$ și \circ definite prin: $x * y = x + y - 3$ și

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, x, y \in \mathbb{Z}$$

a) Justificați că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ.

b) Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2018 \text{ ori } x} = 2^{2018} + 3$.

c) Să se afle $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = ax + b.$$

SOLUȚIE:

a) Verificarea axiomelor inelului comutativ 3p

b) $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2018 \text{ ori } x} = (x - 3)^{2018} + 3 = 2^{2018} + 3$ 1p

Află $x \in \{1, 5\}$ 1p

c) $a = 1$ și $b = -3$ și justificarea izomorfismului între $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 1p

Problema 2.

Fie M mulțimea secvențelor de 8 litere majuscule din alfabetul latin (care are 26 de litere: A, B, C, ..., Z).

Definim pe M legea de compoziție $\#$ astfel: dacă $x = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \in M$ și $y = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \in M$,

atunci $x \# y = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8$.

a) Aflați cardinalul mulțimii M .

b) Calculați (PARAGUAY $\#$ COLUMBIA) $\#$ BRAZILIA

c) Cercetați dacă legea $\#$ este comutativă și dacă admite element neutru.

SOLUȚIE:

a) $\text{card } M = 26^8$ 3p

b) (PARAGUAY $\#$ COLUMBIA) $\#$ BRAZILIA = PARAGBIA $\#$ BRAZILIA = PARAGLIA 2p

c) Legea $\#$ nu este comutativă, (de exemplu AAAAAALL $\#$ SSSSSSB = AAAAASSB și SSSSSSB $\#$ AAAAAALL = SSSSALL) 1p

Evident legea $\#$ nu admite element neutru 1p

Problema 3.

a) Arătați că: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}) + C$

b) Aflați primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(1+e^x)^4}{1+e^{4x}}$

*(Nicolae Sanda – Supliment G.M.)***SOLUȚIE:**

a) Justificarea corectă (de exemplu cu schimbarea de variabilă $t = e^{2x}$) 2p

b) $f(x) = \frac{(1+e^x)^4}{1+e^{4x}} = \frac{1+4e^x+6e^{2x}+4e^{3x}+e^{4x}}{1+e^{4x}} = 1+6\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}+4\frac{e^x \cdot (1+e^{2x})}{1+e^{4x}}$ 1p

$\int 1 dx = x + C$ 1p

$4 \int \frac{e^x \cdot (e^{2x} + 1)}{e^{4x} + 1} dx = \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}}\right) + C$ (cu schimbarea de variabilă $t = e^x$) 2p

Finalizare $\int f(x) dx = x + 3 \operatorname{arctg}(e^{2x}) + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}}\right) + C$ 1p

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și F o primitivă a sa.

Dacă $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ și $F(0) = 1$ să se afle f .

SOLUȚIE:

Din $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ deduce că $\left(\frac{1}{2} F^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2} x^2\right)'$ 2p

$\frac{F^2(x)}{2} - \frac{x^2}{2} = k; \forall x \in \mathbb{R}$ 2p

Înlocuind $x = 0$ deduce $\frac{1}{2} = k$ 1p

$F^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow F(x) = \sqrt{x^2 + 1}; \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Finalizare $f(x) = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \forall x \in \mathbb{R}$ 1p