



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + |2x - 6| = 4\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4x-1}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $C_n = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- (a) Arătați că mulțimea $M = A \cap B$ are un singur element;
(b) Determinați mulțimea $D = B \cap C_9$;
(c) Determinați numerele naturale n pentru care mulțimea C_n conține exact nouă numere naturale.
2. Într-un bazin sunt 72 de pești. Dintre acești pești unii sunt mici, iar alții sunt mari. Fiecare pește mare mănâncă exact doi pești mici și astfel în bazin rămân doar pești mari. După ce în bazin rămân doar pești mari, se introduc în bazin câțiva pești uriași. Știind că fiecare pește uriaș mănâncă exact 3 pești mari și că în bazin rămân doar peștii uriași, stabiliți câți pești uriași au fost introduși în bazin.
3. Fie $\triangle ABC$ echilateral de latură 1 și M un punct în plan. Fie vectorul $\vec{v} = 1007\vec{MA} - 2016\vec{MB} + 1009\vec{MC}$.
- a) Vectorul \vec{v} nu depinde de alegerea punctului M în plan.
b) Arătați că $|\vec{v}| \leq 2016$
4. Doi curieri pleacă din A , respectiv B , unul spre altul cu viteze constante diferite între ele. După întâlnire, pentru a ajunge în punctul terminal, primului i-au mai trebuit 16 ore, iar celuilalt 9 ore. De câte ore a avut nevoie fiecare pentru a parcurge întregul traseu dintre A și B ?

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Demonstrați că expresia de mai jos nu depinde de x :

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x ,$$

$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, x > 0, x \neq 1 .$

2. Arătați că:

- (a) dacă $\sqrt{3x-2} = 5$, atunci numărul $m = \sqrt{4+5x}$ este natural;
(b) dacă $\log_2(1+5\sqrt{x}) = 4$, atunci numărul $n = \log_5(3x-2)$ este natural.

3. Să se studieze injectivitatea funcției $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\sqrt{3}\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a lui a .

4. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4^x \leq 16\}$ și $B_n = \{\log_2 1, \log_2 2, \log_2 3, \dots, \log_2 n\}$, unde n este un număr natural nenul.

- (a) Determinați $C = A \cap B_{10}$;
(b) Determinați numerele naturale n pentru care mulțimea B_n conține exact patru numere întregi.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ cu $A^2 - B^2 = I_3$. Considerăm matricele $X = A - B$ și $Y = A + B$.

a) Arătați că $XY - I_3 = AB - BA$.

b) Demonstrați că $\det(XY - I_3) = -\det(YX - I_3)$.

2. Se dă funcția $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x - 2|}{2 + |x - 2|}}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{|x-2|}}$.

b) Cercetați existența limitei $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{x-2}}$.

3. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$.

b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin 2018x}{\sqrt{1+x}-1}$.

4. a) Folosind proprietățile determinanților, scrieți sub formă de produs:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1-x-y & z & z \\ x & 1-y-z & x \\ y & y & 1-x-z \end{vmatrix}$$

b). Calculați: $d_2 = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2-3 & x_3+2 \\ x_2-4 & x_3-1 & x_1+5 \\ x_3-7 & x_1+3 & x_2+4 \end{vmatrix}$ dacă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

