CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a IX-a

1.

(a) Arătaţi că şirul definit prin $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie aritmetică;

(b) Stabiliţi care dintre numerele 2015 şi 2018 este termen al şirului $a_n = 4n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(c) Pentru orice progresie aritmetică $(x_n)_{n\geq 1}$ se notează $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_{19} ştiind că $x_1 + x_8 + x_{12} + x_{19} = 400$.

2. Din mulţimea $\{-2,-1,0,1,2\}$ se aleg la întâmplare două elemente a şi b , nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot ...\cdot f(2017)$.

b) Demonstrați că $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi $x,y\in(0,+\infty), x\neq y$

c) Stabiliți monotonia funcției f .

4. Fie triunghiul echilateral ABC având latura de lungime 1 și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că $AM < 1$

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Stabiliţi care dintre următoarele numere sunt întregi:

$a=\sqrt{32}-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{80}{5}}-\sqrt{18}$, $b=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{216}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$ şi $c=2\cdot\log_5 3-\log_5 90+\log_5 2$.

2. Demonstraţi că expresia de mai jos nu depinte de x :

$$E=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x\ ,$$

$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, x>0, x\neq 1$.

3. Se dă funcţia $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătați că domeniul de definiție este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f .

4. Se consideră mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,5^x\leq 25\right\}$ şi $B_n=\{\log_2 1,\log_2 2,\log_2 3,\ldots,\log_2 n\}$, unde n este un număr natural nenul.

(a) Determinaţi $C=A\cap B_{20}$;

(b) Determinaţi numerele naturale n pentru care mulţimea B_n conţine exact cinci numere întregi.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2007\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ cu $x,y,z\in\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $A^{2008}\cdot X=B$.

2. a) Calculaţi limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]+[3x]}{x}$;

b) Determinaţi asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x\cdot|x|}{x-1}$.

3. Se dă funcția $f:\mathrm{D}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției f .

b) Să se studieze continuitatea funcției f .

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t}\cdot B, t>0$.

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Verificați identitatea $M_t\cdot M_v=M_{t\cdot v}, (\forall)t,v>0$.

c) Arătați că pentru orice $t>0$ matricea M_t este inversabilă.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte