INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 17 februarie 2018

FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE

SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Arătaţi că, dacă numerele reale $x,\ 3x+1,\ 8x-1$, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci numerele $x,\ \sqrt{3x+1},\ x+3$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică.
Studiaţi dacă reciproca este adevărată.

2. Se consideră expresiile $E(x)=|2x-3|, F(x)=|3x-4|$ şi $G(x,y)=4x+5y,\quad x,y\in\mathbb{R}$.

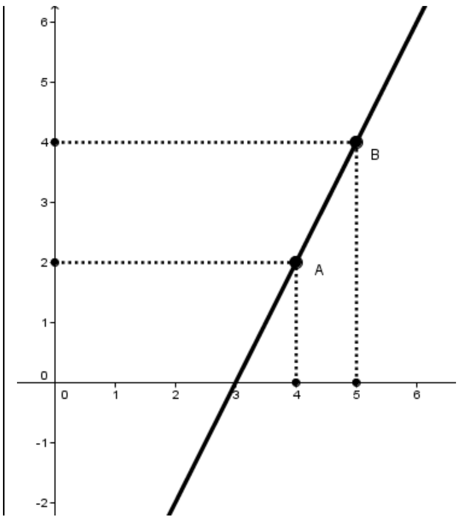
(a) Determinaţi cel mai mic număr întreg k pentru care numerele $E(k)<2$.
(b) Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x+F(x)=2\}$.
(c) Calculaţi cea mai mare valoare a expresiei $G(x,y)$, ştiind că $E(x)\le 2$ şi $F(y)\le 3$.

3. a) Dacă $0\le\alpha\le\beta$ demonstraţi că $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\le\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

b) Dacă $a,b,c\ge 0$ astfel încât $0\le a\le b+c$, demonstraţi că $\dfrac{a}{1+a}\le\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

4.

Dreapta din figura alăturată reprezintă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.
Calculaţi $s=f(1)+f(2)+f(3)+...f(13)$ şi $p=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot...\cdot f(13)$



NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
320112, REŞIŢA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE
SUBIECTE - clasa a X-a

1. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit acelaşi număr de pagini şi a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puţine pagini şi apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

2. Se consideră numărul complex $z=a+2i$, unde $i^2=-1$ şi $a\in(0,+\infty)$.

Determinaţi numărul real a în fiecare dintre următoarele cazuri.

(a) $z+z\cdot\bar{z}+\bar{z}=12$, unde numărul $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z;

(b) numărul z este o soluţie ecuaţiei $x^2-2x+5=0.$

3. Pentru orice numere reale x, y se notează $x\circ y=x+y+xy.$

(a) Arătaţi că numărul $k=2\circ\frac{1}{3}$ este întreg;

(b) Determinaţi numărul real x pentru care $\left(3^x\right)\circ 3=7.$

4. Se dă funcția $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_{\sqrt{3}-1}\left(7-2\sqrt{x}-x\right)$.

a) Arătați că domeniul de definiție este $D=\left[0,9-4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE

Barem de evaluare şi notare

1. Arătaţi că, dacă numerele reale $x,\ \ 3x+1,\ \ 8x-1$, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci numerele $x,\ \sqrt{3x+1},\ x+3$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică.
Studiaţi dacă reciproca este adevărată.

2. Se consideră expresiile $E(x)=|2x-3|, F(x)=|3x-4|$ şi $G(x,y)=4x+5y,\quad x,y\in\mathbb{R}$.

(a) Determinaţi cel mai mic număr întreg k pentru care numerele $E(k)<2$.
(b) Determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x+F(x)=2\}$.
(c) Calculaţi cea mai mare valoare a expresiei $G(x,y)$, ştiind că $E(x)\leq 2$ şi $F(y)\leq 3$.

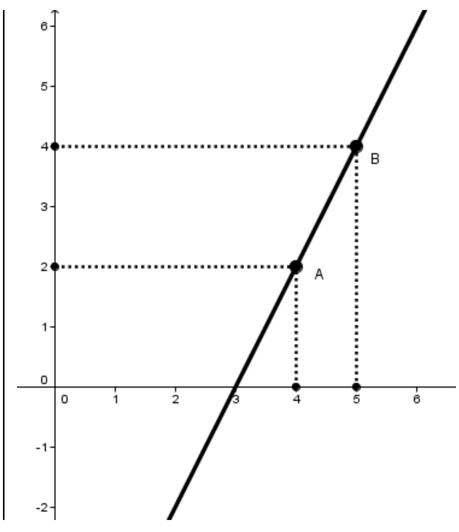
3. a) Dacă $0\leq\alpha\leq\beta$ demonstraţi că $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\leq\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

b) Dacă $a,b,c\geq 0$ astfel încât $0\leq a\leq b+c$, demonstraţi că $\dfrac{a}{1+a}\leq\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$.

4.

Dreapta din figura alăturată reprezintă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.

Calculaţi $s=f(1)+f(2)+f(3)+...f(13)$ şi $p=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot...\cdot f(13)$



(1) $3x+1=\dfrac{x+8x-1}{2}\Rightarrow x=1$	**(4p)**
Dacă $x,\ x+1,3x+1$ sunt în progresie geometrică, atunci $x,\ (x+1)^2=x(3x+1)\Rightarrow x=1$ sau $x=-\dfrac{1}{2}$; pentru $x=-\dfrac{1}{2}$ primele trei numere nu sunt în	**(3p)**

progresie aritmetică, aşadar reciproca este falsă.	
(2) (a) Considerăm $\lvert 2k-3\rvert<2 \Leftrightarrow -2<2k-3<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$; numărul căutat $k=1$	**(3p)**
(b) $A=\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$	**(2p)**
(c) $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right], y\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right] \Rightarrow G_{\max}=\frac{65}{3}$	**(2p)**
(3) a). Demonstrează că $\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}$	**(3p)**
b). Demonstrează că $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$	**(4p)**
(4) $A(4,2), B(5,4)\in G_f \Rightarrow 4a+b=2, 5a+b=4$	**(3p)**
$f(x)=2x-6$	**(2p)**
$s=104, p=0$	**(2p)**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 17 februarie 2018
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ŞTIINŢE SOCIALE

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

1. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

2. Se consideră numărul complex $z = a + 2i$, unde $i^2 = -1$ și $a \in (0, +\infty)$.

Determinați numărul real a în fiecare dintre următoarele cazuri.

(a) $z + z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 12$, unde numărul $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z;

(b) numărul z este o soluție ecuației $x^2 - 2x + 5 = 0$.

3. Pentru orice numere reale x, y se notează $x \circ y = x + y + xy$.

(a) Arătați că numărul $k = 2 \circ \frac{1}{3}$ este întreg;

(b) Determinați numărul real x pentru care $\left(3^x\right) \circ 3 = 7$.

4. Se dă funcția $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(7 - 2\sqrt{x} - x\right)$.

a) Arătați că domeniul de definiție este $D = \left[0, 9 - 4\sqrt{2}\right)$

b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f.

1) Se notează cu x numărul de pagini citite pe zi și se ajunge la ecuația $31 \cdot x = \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4} + 1\right) + \ldots + \left(\frac{x}{4} + 30\right)$	**(3)**
Se obține $x = 20$	**(3p)**
Cartea are 620 de pagini	**(1p)**
2) (a) $a + 2i + (a + 2i)(a - 2i) + a - 2i = 12 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0$; $a = 2 \in (0, +\infty), a = -4 \notin (0, +\infty)$	**(4p)**
(b) $x^2 - 2x + 1 = -4 \Rightarrow (x-1)^2 = (2i)^2 \Rightarrow x = 1 \pm 2i \Rightarrow a = 1$	**(3p)**
3) (a) $k = 3 \in \mathbb{Z}$	**(3p)**
(b) $\left(3^x\right) \circ 3 = 7 \Rightarrow 4 \cdot 3^x = 4 \Rightarrow x = 0$	**(4p)**
4) a) Din condiția de existență $\Rightarrow 7 - 2\sqrt{x} - x > 0$	**(1p)**
Not. $\sqrt{x} = t, t > 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 7 < 0$	**(1p)**
Se obține $t \in \left(0, -1 + 2\sqrt{2}\right)$	**(1p)**

De unde $\Rightarrow x \in \left(0, 9-4\sqrt{2}\right)$	**(1p)**
b) cum $x \in \mathbb{Z}$ și $x \in \left(0, 9-4\sqrt{2}\right) \Rightarrow x \in \{0,1,2,3\}$	**(2p)**
se verifică și se obține $f(3) = 2$	**(1p)**

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
320112, REŞIȚA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro