MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Să presupunem că n este un număr natural impar. La început, Andrei scrie pe tablă numerele $1,2,3,...,2n$. Apoi procedează astfel: alege la întâmplare două numere a și b dintre cele scrise, le șterge și adaugă pe tablă numărul $|a-b|$.Andrei aplică acest procedeu în mod repetat, până când pe tablă este scris un singur număr. Demonstrați că acest ultim număr este impar.

SOLUȚIE:

Notăm cu S suma numerelor existente pe tablă la un moment dat. La început, $S=1+2+3+...+2n=n(2n+1)$ este un număr impar 3p

Fiecare pas micșorează S cu $2\cdot\min\{a,b\}$, care este număr par.. 3p

Deoarece la început S este număr impar, rezultă că S este număr impar și la final.............................. 1p

Problema 2.

Să se demonstreze că numărul $\underbrace{111...1}_{2019}\underbrace{222...2}_{2019}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

SOLUȚIE:

$\underbrace{111...1}_{2019}\underbrace{222...2}_{2019}=10^{4037}+10^{4036}+...+10^{2019}+2\cdot\left(10^{2018}+10^{2017}+...+1\right)$ 1p

$=10^{2019}\cdot\left(10^{2018}+10^{2017}+...+1\right)+2\cdot\left(10^{2018}+10^{2017}+...+1\right)=\left(10^{2018}+10^{2017}+...+10+1\right)\left(10^{2019}+2\right)=$

$=\dfrac{10^{2019}-1}{9}\left(10^{2019}+2\right)=\dfrac{10^{2019}-1}{3}\left(\dfrac{10^{2019}-1}{3}+1\right)$ 3p

$\dfrac{10^{2019}-1}{3}\in\mathbb{N}$ 2p

Finalizare 1p

Problema 3.

Un corp este lansat sub un unghi α față de orizontală, cu viteza v_0. Corpul atinge pământul după 10 secunde la o distanță de $500\sqrt{3}$ m. Știind că $x(t) = tv_o \cos\alpha, y(t) = tv_o \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ $(g \approx 10\ m/s^2)$, unde $x(t)$ este distanța parcursă pe orizontală la momentul t și $y(t)$ este înălțimea la care se găsește corpul la momentul t. Să se calculeze:

a) viteza inițială v_0 și unghiul α ;

b) înălțimea maximă la care a ajuns corpul ;

c) unghiul α sub care trebuie lansat corpul astfel încât distanța la care lovește pământul să fie maximă și determinați această distanță.

SOLUȚIE:

a) $y(10) = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot 10 - \frac{10 \cdot 10^2}{2} = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha = 50\ m/s$ 1p

$x(10) = 500\sqrt{3} \Rightarrow 10v_0 \cos\alpha = 500\sqrt{3} \Rightarrow v_0 \cos\alpha = 50\sqrt{3}\ m/s$ 1p

$(v_0 \sin\alpha)^2 + (v_0 \cos\alpha)^2 = v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{50^2 + \left(50\sqrt{3}\right)^2} = 100\ m/s$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 30°$......... 1p

b) Înălțimea maximă este atinsă pentru $t = -\frac{v_0 \sin\alpha}{-\frac{g}{2} \cdot 2} = 5\ s$ 1p

$y(5) = 5 \cdot 50 - \frac{10 \cdot 25}{2} = 125\ m$ 1p

c) $y(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ 1p

Distanța maximă se obține cînd $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow$ Distanța maximă este egală cu $\frac{100^2 \cdot 1}{10} = 1000\ m = 1\ km$ 1p

Problema 4.

Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele $M \in (BC), N \in (CD), P \in (DA), Q \in (AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{ND} = \frac{PD}{PA} = \frac{QA}{QB} = \mu$.

a) Să se arate că dacă $\mu = 1$, atunci $MNPQ$ este paralelogram.

b) Dacă $MNPQ$ este paralelogram și $\mu \neq 1$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

SOLUȚIE:

a) MQ este linie mijlocie în ΔABC și NP este linie mijlocie în ΔACB 1p

$MQ \parallel AC, NP \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel NP$ 1p

$MQ = \frac{1}{2}AC, NP = \frac{1}{2}AC, MQ = NP$ 1p

Deduce că $MNPQ$ paralelogram 1p

b) Fie O un punct oarecare.

$MNPQ$ este paralelogram$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\mu}\left((1-\mu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{1+\mu}\left((\mu-1)\overrightarrow{OA} - \mu\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$.. 1p

$(1-\mu)\overrightarrow{OC} - (1-\mu)\overrightarrow{OB} = (1-\mu)\overrightarrow{OD} - (1-\mu)\overrightarrow{OA} \Rightarrow (1-\mu)\overrightarrow{BC} = (1-\mu)\overrightarrow{AD}$............................. 1p

Cum $\mu \neq 1 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram.. 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ 18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Un client depune la bancă 10000 lei cu dobânda unitară anuală 2% într-un depozit pe doi ani cu dobândă compusă. Simultan, banca acordă unui alt client un credit de 10000 lei, pentru doi ani, cu dobânda unitară anuală de 6%. Care este profitul băncii după aceste operațiuni?

SOLUȚIE:

Suma finală la depozit este $10000 \cdot \left(1+\frac{2}{100}\right)^2 = 10404$ lei 2p

Dobânda datorată la începutul creditului este de 600 lei 1p

După primul an clientul mai are de achitat 5300 lei, la care se adaugă o dobândă de 318 lei............ 2p

Banca primește $10600+318=10918$ lei 1p

Profitul băncii este de $10918-10404=514$ lei 1p

Problema 2.

Se consideră mulțimea $M=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ și pentru orice $z_1, z_2 \in M$ se definește expresia $E(z_1,z_2)=\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}\cdot z_2}$.

a) Rezolvați în mulțimea M ecuația $E(z,-z)=\frac{i}{n}$, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

b) Dacă $z_1, z_2\in M$ astfel încât $E(z_1,z_2)-E(z_2,z_1)\in\mathbb{R}$, arătați că $z_1-z_2\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că $E(z_1,z_2)\in M$, pentru orice $z_1,z_2\in M$.

SOLUȚIE:

a) 2p, din care:

Ecuația are două soluții în $\mathbb{C}$: $z_1, z_2=\left(n\pm\sqrt{n^2-1}\right)i$ 1p

$z_1=\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)i\notin M$, $z_1=\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)i\in M$ 1p

b) 2p, din care:

$E(z_1,z_2)-E(z_2,z_1)=(z_1-z_2)\left(\dfrac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\dfrac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}\right)\in\mathbb{R}$ și $\dfrac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\dfrac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}\in\mathbb{R}$ 1p

presupunând că $\dfrac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\dfrac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}=0$, se obține $\overline{z}_1\cdot z+\overline{z}_2\cdot z_1=2$ și de aici

$2=\left|\overline{z}_1\cdot z_2+\overline{z}_2\cdot z_1\right|\le\left|\overline{z}_1\cdot z_2\right|+\left|\overline{z}_2\cdot z_1\right|<2$, contradicție; deci rezultă că $z_1-z_2\in\mathbb{R}$ 1p

c) 3p, din care:

$\left|z_1-z_2\right|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=r_1^2+r_2^2-t$, $\left|1-\overline{z}_1z_2\right|^2=(1-\overline{z}_1z_2)(1-z_1\overline{z}_2)=1+r_1^2r_2^2-t$,

unde r_1,r_2 sunt modulele celor două numere complexe, iar $t=\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_2\in\mathbb{R}$ 2p

$\left|E(z_1,z_2)\right|<1\Leftrightarrow r_1^2+r_2^2<1+r_1^2r_2^2\Leftrightarrow\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)>0$- adevărat pentru orice $z_1,z_2\in M$ 1p

Problema 3.

Se consideră $S_n(x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)+...+\cos(nx)$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi\},k\in\mathbb{Z}$.

a) Rezolvați ecuația $S_3(x)=0$, pentru $x\in(0,2\pi)$.

b) Rezolvați inecuația $S_4(x)-S_2(x)\ge 0$, pentru $x\in(0,\pi)$.

c) Calculați $S_n(x)$.

SOLUȚIE:

a) 3p, din care:

$S_3(x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)\cdot(2\cos x+1)=0$ 1p

$x\in\left\{\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{7\pi}{4}\right\}$ 2p

b) 2p, din care:

$S_4(x)-S_2(x)\ge 0\Leftrightarrow\cos\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\ge 0$ 1p

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{7}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{7},\dfrac{5\pi}{7}\right]$ 1p

c) $S_n(x)=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\dfrac{(n+1)x}{2}$ 2p

Problema 4.

Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

a) Arătați că funcția f este strict monotonă.

b) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa ei.

c) Arătați că $f(x-1)+f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)>f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$.

SOLUȚIE:

a) 2p, din care:

$g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ este funcție strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ 1p

arcsin este strict crescătoare, deci f este strict descrescătoare 1p

b) 2p, din care:

f strict monotonă, deci injectivă 1p

Arată că f surjectivă și determină $f^{-1}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,0]$, $f^{-1}(x)=-\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 1p

c) 3p, din care:

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$ 1p

$x-1<x\Rightarrow f(x-1)>f(x)$, $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x+1}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)$ și adunând termen cu termen rezultă

$f(x-1)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)>0$ 1p

$f^{-1}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,0]\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\le 0$ 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.
Un mobil M se mişcă în planul xOy astfel încât, în fiecare moment $t \geq 0$, coordonatele sale sunt $x = x(t) = 1 + 3\cos t$, $y = y(t) = -2 + 3\sin t$. La momentul $t \geq 0$, vectorul viteză $\vec{v}$ este dat de $\vec{v}(t) = x'(t)\cdot\vec{\mathrm{i}} + y'(t)\cdot\vec{\mathrm{j}}$.

a) Demonstraţi că punctul M se mişcă pe un cerc.
b) Arătaţi că, pe întreaga durată a mişcării, vectorul viteză are acelaşi modul.

SOLUŢIE:
a) Considerăm punctul $A(1,-2)$; deoarece $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9$, $\forall t \geq 0$, punctul M se află, în orice moment, pe cercul de centru A şi rază 3. .... 3p
b) Vectorul viteză este $\vec{v}(t) = -3\sin t\cdot\vec{\mathrm{i}} + 3\cos t\cdot\vec{\mathrm{j}}$ 2p
Modulul vitezei este $|\vec{v}| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = 3, \forall t \geq 0$ 2p

Problema 2.
Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \log_2 56 & 3 \\ 0 & \log_2 7 \end{pmatrix}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, notăm cu S_n suma elementelor matricei A^n.

a) Demonstraţi că $S_n = 2\log_2^n 56$, oricare ar fi numărul natural nenul n.
b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $S_n \leq 2019$.

SOLUŢIE:
a) Se arată, prin inducţie, că $A^n = \begin{pmatrix} \log_2^n 56 & \log_2^n 56 - \log_2^n 7 \\ 0 & \log_2^n 7 \end{pmatrix}$ şi, de aici, cerinţa problemei. 3p
b) Pentru $n \leq 3$, avem că $S_n \leq S_3 = 2\log_2^3 56 < 2\log_2^3 64 = 2\cdot 6^3 < 2019$ 2p
Observăm că $\log_2 7 > 2{,}75 \left(\Leftrightarrow 7 > 2^{2{,}75} \Leftrightarrow 7^4 > 2^{11}\right)$, prin urmare $\log_2 56 > 5{,}75$.
Rezultă că $S_4 = 2\cdot\log_2^4 56 > 2\cdot 5{,}75^4 > 2019$, aşadar numerele căutate sunt $\{1,2,3\}$ 2p

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:[-2,0)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\sqrt{x+2}$.

a) Arătaţi că funcţia *f* are două puncte de extrem local.

b) Demonstraţi că oricare ar fi $m\in(-\infty,0)$, există un unic $x_m\in(-1,0)$ pentru care $f(x_m)=m$.

SOLUŢIE:

a) Funcţia *f* este derivabilă pe $(-2,0)$ şi $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^3\sqrt{x+2}}, \forall x\in(-2,0)$, unde $g(x)=x^3+3x+8$.

Cum $g'(x)=3x^2+3>0, \forall x$, iar $g(-2)\cdot g(-1)=(-6)\cdot 4<0$, rezultă că există unic $x_0\in(-2,-1)$ cu $g(x)<0, \forall x\in(-2,x_0), g(x_0)=0, g(x)>0, \forall x\in(x_0,0)$. Semnul lui f' este invers semnului lui *g*, prin urmare *f* este strict crescătoare pe $(-2,x_0)$ şi strict descrescătoare pe $(x_0,0)$. 3p

Funcţia f are două puncte de extrem local: -2 este punct de minim, iar x_0 este punct de maxim. 1p

b) Funcţia f este continuă pe $(-1,0)$ şi $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=0, \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=-\infty$, de unde existenţa unei soluţii $x_m\in(-1,0)$ a ecuaţiei $f(x)=m$. 2p

Unicitatea soluţiei rezultă din faptul că *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0)$. 1p

Problema 4.

Spunem că matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ au proprietatea (P) dacă $A^2=BC, B^2=CA$ şi $C^2=AB$.

a) Dacă matricele A,B,C au proprietatea (P), arătaţi că $A^3=B^3=C^3$.

b) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de matrice distincte două câte două, cu toate elementele reale, care au proprietatea (P).

c) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de matrice distincte două câte două, având toate elementele numere complexe nereale, care au proprietatea (P).

SOLUŢIE:

a) Avem că $A^3=A\cdot A^2=A\cdot BC=AB\cdot C=C^2\cdot C=C^3$ şi analoagele. 3p

b) De exemplu, luăm $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, unde *a*, *b*, *c* sunt numere reale distincte două câte două. 2p

c) De exemplu, luăm $A=\begin{pmatrix}a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\\a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\\a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}^*$, $B=\varepsilon A$ şi $C=\varepsilon^2 A$, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Viteza $v(r)$ a sângelui care curge printr-un vas sangvin de rază R şi lungime l la distanță r față de axa centrală(a vasului sangvin privit ca un cilindru) este dată de expresia $v(r)=\frac{P}{4\eta l}\left(R^2-r^2\right)$, unde P este diferența dintre presiunile de la capetele vasului iar η este vâscozitatea sângelui.

a) Determinați viteza medie $v_m=\frac{1}{R}\int\limits_0^R v(r)dr$ a sângelui de-a lungul intervalului $[0,R]$.

b) Determinați raportul dintre viteza maximă a sângelui, $v_{\max}$ şi v_m.

SOLUȚIE:

a) $v_m=\frac{1}{R}\int\limits_0^R \frac{P}{4\eta l}\left(R^2-r^2\right)dr=\frac{1}{R}\cdot\frac{P}{4\eta l}\cdot\left(R^2\int\limits_0^R dr-\int\limits_0^R r^2dr\right)=\frac{PR^2}{6\eta l}$ 3p

b) $v_{\max}=\frac{PR^2}{4\eta l}$ 3p

$\frac{v_{\max}}{v_m}=\frac{3}{2}$ 1p

Problema 2.

Se consideră un polinom $f\in\mathbb{Z}[X]$.

a) Demonstrați că $\left(f(a)-f(b)\right)\vdots(a-b),(\forall)a,b\in\mathbb{Z}.$

b) Dacă $f(2018)=2019^{2018}$ şi $f(2019)=2019^{2019}$, demonstrați că *f* nu are rădăcini întregi.

SOLUȚIE:

a) $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$ 1p

Justificare $\left(f(a)-f(b)\right)\vdots(a-b),(\forall)a,b\in\mathbb{Z}.$ 1p

b) Presupunem prin reducere la absurd că există $x_0\in\mathbb{Z},$ astfel încât $f(x_0)=0.$ 1p

Din subpunctul **a)** $\left(f(2018)-f(x_0)\right)\vdots\left(2018-x_0\right)$, adică $2019^{2018}\vdots\left(2018-x_0\right)$.

$\left(f(2019)-f(x_0)\right)\vdots\left(2019-x_0\right)$ adică $2019^{2019}\vdots\left(2019-x_0\right)$. 2p

$2018-x_0, 2019-x_0$ sunt două numere consecutive, aşadar unul dintre ele este par........ 1p

Cum $2019^{2018}, 2019^{2019}$ sunt impare, conchidem că *f* nu are rădăcini întregi........ 1p

Problema 3.

Se consideră o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$. Verificați dacă există primitive F ale funcției f, cu proprietatea că $F(x)\cdot F(1-x)=F\left(x^2\right)$.

SOLUȚIE:

$F'(x)\cdot F(1-x)-F(x)F'(1-x)=2xF'\left(x^2\right)$ 3p

Cum $F'(x)=f(x)$, avem că $f(x)\cdot F(1-x)-F(x)f(1-x)=2xf\left(x^2\right)$ 1p

Pentru $x=0$, obținem că $f(0)\cdot F(1)-f(1)\cdot F(0)=0$ 1p

Pentru $x=1$, obținem că $f(1)\cdot F(0)-f(0)\cdot F(1)=2f(1)$ 1p

Obținem că $f(1)=0$ (contradicție)... 1p

Problema 4. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^{[x]}\left(x-2\cdot\left[\frac{x}{2}\right]-1\right)+1$. (Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real *a*).

a) Demonstrați că $f(x+2)=f(x),(\forall)x\in[0,\infty)$.

b) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$ și $\int_0^{2018} f(x)dx$.

SOLUȚIE:

a)

$$f(x+2)=(-1)^{[x+2]}\left(x+2-2\cdot\left[\frac{x+2}{2}\right]-1\right)+1=(-1)^{[x]}\left(x+2-2\cdot\left[\frac{x}{2}+1\right]-1\right)+1=$$

$$=(-1)^{[x]}\left(x+\cancel{2}-2\cdot\left[\frac{x}{2}\right]-\cancel{2}-1\right)+1=f(x)$$

.... 2p

b) $\int_0^2 f(x)dx=1$ 2p

$\int_0^{2018} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+...+\int_{2016}^{2018} f(x)dx.$ 1p

Din faptul că funcția *f* este periodică de perioadă $T=2$, obținem că $\int_0^{2018} f(x)dx=1009.$ 2p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*