MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ atunci are loc inegalitatea $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Fie $x,y,z\in(0,+\infty)$ astfel încât $x+y+z=2$. Demonstrați că $\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\le 6\sqrt{3}$.

<u>Barem</u>

a) Avem $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\le 3a^2+3b^2+3c^2$ **1p**

$2ab+2bc+2ac\le 2a^2+2b^2+2c^2$ **1p**

$0\le(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ **1p**

b) Fie $\sqrt{11x+3}=a, \sqrt{11y+4}=b, \sqrt{11z+7}=c$

Avem $a^2=11x+3, b^2=11y+4, c^2=11z+7$ **1p**

Folosim a) și rezultă

$\left(\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\right)^2\le 3(11x+3+11y+4+11z+7)$. **1p**

$\left(\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\right)^2\le 3[11(x+y+z)+14]$. **1p**

Finalizare: $\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\le 6\sqrt{3}$. **1p**

Problema 2.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $2|x-3|+y^2+9z^2+1=2y+12z$.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $|7n+14|\le|6n|$.

<u>Barem</u>

a) Ecuația se scrie $2|x-3|+(y-1)^2+(3z-2)^2=4$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} z\in(-\infty,-1]\cap\mathbb{Z}(\text{nu convine}) \\ z\in(1,\infty)\cap\mathbb{Z}(\text{nu convine}) \end{array}\right\}$ **1p**

Așadar, $z\in\{0,1\}$

Pentru $z=0\Rightarrow 2\cdot|x-3|+(y-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}|x-3|=1\\|y-1|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ **0.5p**

Pentru $z=1\Rightarrow 2\cdot|x-3|+(y-1)^2=3\Rightarrow\begin{cases}|x-3|=1\\|y-1|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3=\pm1\\y-1=\pm1\end{cases}$

$$1^\circ.\begin{cases}x-3=1\\ y-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$$
$$2^\circ.\begin{cases}x-3=1\\ y-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$$
....**0.5p**

$$3^\circ.\begin{cases}x-3=-1\\ y-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$
$$4^\circ.\begin{cases}x-3=-1\\ y-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$$
....**0.5p**

Așadar, mulțimea soluțiilor este: $S=\{(3,1,0);(4,2,1);(4,0,1);(2,2,1);(2,0,1)\}$ **0.5p**

b) $n=0$ nu verifică inecuația dată

Așadar, $\left|\frac{7n+14}{6n}\right|\le 1\Rightarrow -1\le\frac{7n+14}{6n}\le 1$ **1p**

Rezultă $\begin{cases}\frac{13n+14}{6n}\ge 0\\ \frac{n+14}{6n}\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\in\left\{\left(-\infty,-\frac{14}{13}\right]\cup(0,\infty)\right\}\cap\mathbb{Z}\\ n\in[-14,0)\cap\mathbb{Z}\end{cases}$ **1p**

Finalizare $n\in\{-14,-13,-12,...,-3,-2\}$ **1p**

Problema 3.

a) Calculați produsul $p=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{19\pi}{12}$.

b) Dacă $\sin(a+b-c)=1$, demonstrați că $\sin(2a)+\cos(3a+b-c)=0$.

<u>Barem</u>

a) Avem $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **1p**

$\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{19\pi}{12}=-\sin\left(2\pi-\frac{19\pi}{12}\right)=-\sin\frac{5\pi}{12}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}$ **1p**

Rezultă că $p=-\frac{\sqrt{6}}{8}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}}{16}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{6}}{32}$ **1p**

b) Justifică relația $\cos(a+b-c)=0$ **1p**

Avem succesiv

$\cos(3a+b-c)=\cos[2a+(a+b-c)]$ **1p**

$=\cos(2a)\cdot\cos(a+b-c)-\sin(2a)\cdot\sin(a+b-c)=-\sin(2a)$ **1p**

Așadar, $\sin(2a)+\cos(3a+b-c)=0$ **1p**

Problema 4.

Se dă patrulaterul convex $MNPQ$ astfel încât $MP\perp NQ$ și $MP\cap NQ=\{O\}$. Fie A_1,A_2A_3,A_4 proiecțiile punctului O pe $[MN],[NP],[PQ]$, respectiv $[QM]$.

a) Demonstrați că $\frac{A_1M}{A_1N}\cdot\frac{A_2N}{A_2P}\cdot\frac{A_3P}{A_3Q}\cdot\frac{A_4Q}{A_4M}=1.$

b) Să se demonstreze că dreptele A_1A_4, A_2A_3 și NQ sunt concurente.

Barem

a) În triunghiul $NOM, OA_1 \perp NA, A_1 \in [MN]$, avem $OM^2 = MA_1 \cdot MN$ și $NO^2 = NA_1 \cdot NM \Rightarrow \frac{A_1M}{A_1N}=\frac{OM^2}{ON^2}$ (1),

analog $\frac{A_2N}{A_2P}=\frac{ON^2}{OP^2}$ (2), $\frac{A_3P}{A_3Q}=\frac{OP^2}{OQ^2}$ (3), $\frac{A_4Q}{A_4M}=\frac{OQ^2}{OM^2}$ (4)

Înmulțind relațiile (1) – (4) obținem **a)** **2p**

b) Fie $A_1A_4 \cap NQ = \{S\}, A_2A_3 \cap NQ = \{T\}$, demonstrăm că S=T.

În triunghiul NMQ aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare $S - A_1 - A_4$

avem $\frac{A_4M}{A_4Q}\cdot\frac{SQ}{SN}\cdot\frac{A_1N}{A_1M}=1 \Rightarrow \frac{SQ}{SN}=\frac{OQ^2}{ON^2}$ (5) **2p**

În triunghiul NPQ aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare $T - A_2 - A_3$

Avem $\frac{TQ}{TN}\cdot\frac{A_2N}{A_2P}\cdot\frac{A_3P}{A_3Q}=1 \Rightarrow \frac{TQ}{TN}=\frac{OQ^2}{ON^2}$ (6) **2p**

Din (5) și (6) rezultă că $\frac{SQ}{SN}=\frac{TQ}{TN}$ (7)

Finalizare S=T..**1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \lg\frac{1-x}{1+x}$.

- **a)** Să se determine *D*, domeniul maxim de definiție.
- **b)** Să se demonstreze că funcția *f* este o funcție impară.
- **c)** Să se calculeze suma $f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(-\frac{1}{2018}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+...+f\left(\frac{1}{2019}\right)$.

<u>Barem</u>

- **a)** Determină $D=(-1,1)$ **2p**
- **b)** $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$ **2p**
- **c)** Cum *f* impară $\Rightarrow f(-x)+f(x)=0, \forall x\in D$ **1p**

Obține $f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(-\frac{1}{2018}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+...+f\left(\frac{1}{2019}\right)=$

$=f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{1}{2019}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)=f(0)=0$ **2p**

Problema 2.

Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$.

- **a)** Determinați *n* astfel încât $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.
- **b)** Pentru $n=8$, verificați dacă există valori ale lui *x* astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

Barem

a) $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4} \div \Leftrightarrow \frac{1}{2}C_n^1 = \frac{1}{2}\left(C_n^0 + \frac{C_n^2}{4}\right)$ **1p**

$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right)$ **1p**

$n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow n = 8$ ($n = 1$ nu convine) **1p**

b) $T_6 - T_4 = 56 \Rightarrow C_8^5 \left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-5} \cdot \left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^5 - C_8^3 \left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-3} \cdot \left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^3 = 56$ **1p**

Obține $2^{1-x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2^x - 2 = 0$ **2p**

Obține $2^x = 1$ sau $2^x = -2$, deci $x = 0$ **1p**

Problema 3.

Două puncte materiale *A* și *B* se deplasează de-a lungul curbelor date de legile de mișcare: $y_1(t) = 2^t$, respectiv $y_2(t) = -t + 6$, $t \geq 0$, unde timpul t se măsoară în secunde, iar y se măsoară în centimetri.

a) Reprezentați în sistemul ortogonal (tOy) legile de mișcare ale punctelor materiale *A* și *B*.

b) După cât timp se întâlnesc cele două puncte materiale și ce distanță a parcurs *B* până la momentul întâlnirii cu *A*?

Barem

a) Reprezintă geometric graficul funcției $y_1(t) = 2^t, t \geq 0$ **1p**

Reprezintă geometric graficul funcției $y_2(t) = -t + 6, t \geq 0$ **1p**

b) *A* întâlnește *B* $\Leftrightarrow G_{y_1} \cap G_{y_2} = \{P(t, y)\} \Leftrightarrow y_1(t) = y_2(t)$ **1p**

Obține ecuația $2^t = -t + 6$ și observă soluția $t = 2$ (sau o deduce din reprezentarea geometrică a celor două grafice) **1p**

Demonstrează că funcția $f(t) = 2^t + t - 6,\ t \geq 0$ este strict crescătoare, deci injectivă și astfel ecuația $f(t) = f(2)$ are soluție unică $t = 2$ $\Rightarrow$ cele două puncte se întâlnesc după 2 secunde **2p**

Punctul B se deplasează până se întâlnește cu A de la $(0,6)$ la $(2,4)$ și parcurge distanța de $2\sqrt{2}$ cm **1p**

Problema 4.

În reperul cartezian (xOy) se consideră triunghiul de vârfuri $A(0,1), B(2,1), C(1,-2)$.

a) Determinați punctul *M* situat pe axa *Ox* astfel încât triunghiul *AMB* să fie dreptunghic cu $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$.

b) Demonstrați că două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.

Barem

a) Fie $M(x,0) \in (Ox)$, $m(\sphericalangle AMB) = 90^\circ \Rightarrow AM^2 + MB^2 = AB^2$ **1p**

Obține $x^2 + 1 + (x-2)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1,0)$ **1p**

b) $A'\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ mijlocul lui $[BC]$,ecuația medianei $(AA'): y = -x + 1$ **2p**

$B'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ mijlocul lui $[AC]$, ecuația medianei $(BB'): y = x - 1$ **2p**

$m_{AA'} = -1, m_{BB'} = 1 \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_{BB'} = -1 \Rightarrow AA' \perp BB'$ **1p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

a) Demonstrați că există $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^3=m\cdot A$.

b) Rezolvați ecuația $A\cdot X=B,\ X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Barem

a) Obține $m=10$ …………………………………………………………………………**3p**

b) Daca $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, atunci se obține $\begin{cases}a+2b-c=0\\ 2a+2b=0\\ a+4b-3c=0\end{cases}$ ………………………………………**1p**

Sistemul are soluția $(-t,\ t,\ t), t\in\mathbb{R}$ ………………………………………………**3p**

Problema 2. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $X(t)=I_2+t\cdot A$, unde $t\in\mathbb{R}$.

a) Verificați egalitatea $X(t_1)\cdot X(t_2)=X\left((t_1+1)(t_2+1)-1\right)$.

b) Determinați valorile lui *t* pentru care matricea $X(t)$ este inversabilă.

c) Calculați $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X(2018)$

Barem:

a) Verifică relația ……………………………………………………………………………**2p**

b) Impune condiția $X(t)$ – inversabilă $\Leftrightarrow \det\left(X(t)\right)\neq 0 \Leftrightarrow t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ……………………**2p**

c) Prin inducție se obține $X(t_1)\cdot X(t_2)\cdot\ldots\cdot X(t_n)=X\left((t_1+1)(t_2+1)\cdot\ldots\cdot(t_n+1)-1\right)$ ……………**1p**

Folosind pct. b) se observă $X^{-1}(a)\cdot X(a+1)=X\left(\frac{1}{a+1}\right)$ ……………………………………**1p**

Finalizare $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X(2018)=X\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot 2109}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2018}-1\right)$ ……………………**1p**

Problema 3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\frac{m\cdot x}{x+1},\ m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile parametrului m astfel încât tangenta la graficul funcției f în $x_0=1$ să fie paralelă cu dreapta $d:2x-y+1=0$.

b) Determinați valorile parametrului m astfel încât funcția f să fie strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

<u>Barem:</u>

a) Impune conditia ca panta tangentei sa fie egala cu panta dreptei $\Leftrightarrow f'(1)=2$ **1p**

Obține $f'(x)=\frac{x^2+x(2-m)+1}{x(x+1)^2}$ **1p**

Finalizare $f'(1)=2\Leftrightarrow m=-4$ **1p**

b) Impune conditia $f'(x)>0,(\forall)x>0\Leftrightarrow x^2+x(2-m)+1>0,(\forall)x>0\quad(1)$ **1p**

Relatia (1) revine la $i)\ \Delta<0\Leftrightarrow m\in(0,4)$ **1p**

sau $ii)\ \Delta\ge 0,\ x_1+x_2<0,\ x_1\cdot x_2>0\Leftrightarrow m\in(-\infty,0]$ **1p**

Finalizare Pentru $m\in(-\infty,4)$ funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ **1p**

Problema 4. Într-un bazin, apa curge prin trei robinete identice. Dacă primul robinet se deschide timp de 2 ore, al doilea se deschide timp de 3 ore iar al treilea se deschide timp de 2 ore, în bazin se adună 400 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide timp de o oră, al doilea se deschide timp de 2 ore, iar al treilea se deschide timp de 4 ore, în bazin se adună 300 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide timp de 3 ore, al doilea robinet se deschide timp de o oră, iar al treilea robinet se deschide timp de 6 ore, în bazin se adună 500 dal de apă. Determinați debitul fiecărui robinet.

<u>Barem:</u>

Notează cu *a,b,c* debitele celor trei robinete

Scrie sistemul $\begin{cases}2a+3b+2c=400\\ a+2b+4c=300\\ 3a+b+6c=500\end{cases}$ **2p**

Notând cu A, matricea sistemului, obține $\det A=24$ **3p**

Obține soluțiile $a=100,\ b=50,\ c=25$ **2p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X + 2$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Demonstrați că polinomul *f* are o singură rădăcină irațională.

c) Calculați $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)$.

Barem:

a) Scrie relațiile Viete……………………………………………………………………………………**1p**

Obține $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -4$ ……………………………………………………………………...……………**1p**

b) Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -4$, deduce că polinomul are o rădăcină reală……………………………...………**1p**

Observă că $f \in \mathbb{Z}[X]$ și analizează existența rădăcinilor raționale……………………………………..……**1p**

Concluzia : polinomul are o rădăcină reală care nu este rațională, deci are o singură rădăcină irațională.........**1p**

c) Deoarece x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini , rezultă $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) = \dfrac{(-2-x_1)(-2-x_2)(-2-x_3)}{x_1x_2x_3}$

Finalizare $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) = \dfrac{f(-2)}{-2} = 5$ …………………………………………………………..…...**2p**

OBS: Folosind relațiile Viete, obține $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) = 5$ ………………..................................….**2p**

Problema 2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ și corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

a) Determinați probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie neinversabil.

b) Rezolvați în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ecuația $\hat{3} \cdot x^4 + \hat{2} = \hat{0}$.

c) Justificați dacă există un morfism de grupuri $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ astfel încât $f\left(\hat{3}\right) = \bar{2}$.

Barem:

a) Obține $U(\mathbb{Z}_6) = \left\{\hat{1}, \hat{5}\right\}$, deci probabilitate cerută este $\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………………...**2p**

b) Obține $\hat{3} \cdot x^4 + \hat{2} = \hat{0} \Leftrightarrow x^4 = \hat{4} \Rightarrow x \in \left\{\hat{3}, \hat{4}\right\}$……………………………………………………………**2p**

c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există un morfism cu $f\left(\hat{3}\right)=\bar{2}$.

În mod necesar $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ și $f\left(\hat{0}\right)=\bar{1}$ **2p**

Atunci $f\left(\hat{3}+\hat{3}\right)=\bar{2}\cdot\bar{2}\Leftrightarrow f\left(\hat{0}\right)=\bar{4}$,contradicție. Presupunerea este falsă, deci nu există un astfel de morfism.....**1p**

Problema 3.

a) Demonstrați că $\int_0^1\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă având derivata descrescătoare pe $[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)dx\le f(1)-\frac{1}{2}\cdot f'(1)$.

Barem:

a) Folosind metoda integrării prin părții , obține cerința...**3p**

b) Scrie $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'\cdot f(x)dx=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx$ **2p**

Deoarece $f'(x)$ este descrescatoare si $x\le 1\Rightarrow f'(x)\ge f'(1)$ și $\int_0^1 x\cdot f'(x)dx\ge\frac{1}{2}\cdot f'(1)$ **1p**

Finalizare $\int_0^1 f(x)dx\le f(1)-\frac{1}{2}\cdot f'(1)$ **1p**

Problema 4. Costul total de cumpărare și întreținere a unui aparat medical pentru ***x*** ani este exprimat de relația $C(x)=4000\left(30+2\int_0^x\sqrt[3]{t}\,dt\right)$ (euro).

a) Determinați prețul de cumpărare.

b) Determinați costul exclusiv de întreținere pentru 8 ani a aparatului .

Barem:

a) Pentru $x=0\Rightarrow C(0)=120000$ **3p**

b) Obtine $C(x)=4000\left(30+2\int_0^x\sqrt[3]{t}\,dt\right)=4000\left(30+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}\right)$ **2p**

$x=8\Rightarrow C(8)=216000$ **1p**

Costul exclusiv de intretinere este $C(8)-C(0)=96000$ **1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.*