**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**"ADOLF HAIMOVICI"**
**Etapa locală, 8 februarie 2020**
**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**
**SUBIECTE - clasa a IX-a**

**1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir neconstant pentru care $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{3},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ . Arătați că șirul $b_n=\frac{a_n}{n},n\geq 1$ este o progresie aritmetică.

**2.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\left\{\frac{2x-1}{3}\right\}+x$ .

**3.** Arătați că în orice $\Delta ABC$ cu $O$ centrul cercului circumscris și $H$ ortocentrul său, are loc relația $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ .

**4.** Fie $\Delta ABC$ și $G$ centrul de greutate al său. O dreaptă $d$ care trece prin $G$ taie $[AB]$ în $Q$ și $[AC]$ în $P$ . Arătați că $\frac{BQ}{AQ}+\frac{CP}{AP}=1$

**Notă:**
**Toate subiectele sunt obligatorii.**
**Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.**
**Timp de lucru: 3 ore.**

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**"ADOLF HAIMOVICI"**
**Etapa locală, 8 februarie 2020**
**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**
**SUBIECTE - clasa a X-a**

**1.** a) Rezolvați ecuația: $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^{x}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}=3$ .

**2.** Să se calculeze $\log_{12}2$ în funcție de $a=\log_{48}3$.

**3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[7x+10]$ nu e nici injectivă, nici surjectivă .

**4.** Fie $k>0$ și $ABCD$ un patrulater convex, $M\in[AD], N\in[BC]$ și $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=k$ . Dacă $AB=a, CD=c$ , arătați folosind numerele complexe că $MN\leq\frac{a+k\cdot c}{k+1}$ .

**Notă:**
**Toate subiectele sunt obligatorii.**
**Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.**
**Timp de lucru: 3 ore.**

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**"ADOLF HAIMOVICI"**
**Etapa locală, 8 februarie 2020**
**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**
**SUBIECTE - clasa a XI-a**

**1.** Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Calculați $A^{100}$.

**2.** Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3+2x^2+x+1}-ax^2-bx-c\right)=1$

**3.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care îndeplinește simultan condițiile:

i) $f(x)\le 2,(\forall)x\in\mathbb{R}$;

ii) $f\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{1+f(x)}{2},(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Arătați că: a) $f(x)\le\frac{f\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right),(\forall)n\in\mathbb{N},(\forall)x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)\le\frac{3}{2},(\forall)x\in\mathbb{R}$.

**4.** a) Calculați determinantul: $d_1=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ac & c^2-ab\\ 2a+b+c & a+2b+c & a+b+2c\end{vmatrix}$;

b) Calculați determinantul, scriind rezultatul ca produs: $d_2=\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$.

**Notă:**
**Toate subiectele sunt obligatorii.**
**Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.**
**Timp de lucru: 3 ore.**

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
**"ADOLF HAIMOVICI"**
**Etapa locală, 8 februarie 2020**
**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**
**SUBIECTE - clasa a XII-a**

**1.** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=xy-3x-3y+12$ . Calculați $A=\frac{1}{101}*\frac{3}{101}*\frac{5}{101}*...*\frac{501}{101}$.

**2.** Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x\circ y=5xy+6x+6y+6$. Se cere:

a) Determinați elementele simetrizabile ale legii date;

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $x\circ x\circ x\circ x\circ x=-1$.

**3.** Calculați integrala $I=\int\frac{x^{213}+x^{106}}{\left(x^{107}+2\right)^{213}}dx$, $x>0$.

**4.** Să se calculeze primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x\left(x^{100}+1\right)}$ .

**Notă:**
**Toate subiectele sunt obligatorii.**
**Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.**
**Timp de lucru: 3 ore.**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**“ADOLF HAIMOVICI”**

**Etapa locală, 8 februarie 2020**

**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**

**BAREM - clasa a IX-a**

**1.** Pentru $\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 = (1+2)a_1 \\ n=2 \Rightarrow a_3 = 6a_1 = (1+2+3)a_1 \end{array}$

Dem. prin inducție că $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot a_1$ ...4p

Det. $b_n = \dfrac{n+1}{2} \cdot a_1$ ...1p

Dem. că e progresie aritmetică ...2p

**2.** Scrie $\left\{\dfrac{2x-1}{3}\right\} = \dfrac{2x-1}{3} - \left[\dfrac{2x-1}{3}\right]$ ...1p

Ecuația devine $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{5x-1}{3}$ ...1p

Folosind $[x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x] \Rightarrow \left[\dfrac{4x-2}{3}\right] = \dfrac{5x-1}{3}$ ...2p

$\dfrac{5x-1}{3} \le \dfrac{4x-2}{3} < \dfrac{5x-1}{3} + 1$ ....1p

$\dfrac{5x-1}{3} = k \in \mathbb{Z}$ Determină $k \in \{-6,-5,-4,-3,-2\}$ ...1p

Finalizare ...1p

**3.** Luăm $A'$ punctul diametral opus lui $A$ pe cercul circumscris $\Delta ABC$ ...1p

Dem. că $HBA'C$ e paralelogram ...2p

$\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$

În $\Delta OHA'$ avem $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA'}$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO}$ ...1p

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ ...1p

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}$ ...1p

Finalizare ...1p

**4.** Fie $d \cap BC = \{N\}$; $M$ mijlocul lui $[BC]$ ...1p

Din T. Menelaos pt. $\Delta AMC$ și punctele $P, G, N$ rezultă $\frac{PC}{PA} \cdot \frac{GA}{GM} \cdot \frac{MN}{NC} = 1$ ...2p

Din T. Menelaos pt. $\Delta AMB$ și punctele $\mathrm{G}, \mathrm{Q}, N$ rezultă $\frac{QB}{QA} \cdot \frac{GA}{GM} \cdot \frac{MN}{NB} = 1$ ...2p

$\frac{PC}{PA} + \frac{QB}{QA} = \frac{NB}{2MN} + \frac{NC}{2MN}$ ...1p

Finalizare ...1p

**Notă:**

Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.

Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**"ADOLF HAIMOVICI"**

**Etapa locală, 8 februarie 2020**

**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII**

**BAREM - clasa a X-a**

**1.** a) se aduce ecuația la forma $5\cdot 25^x+6\cdot 6^x=30+6^x\cdot 25^x$ …1p

se obține $\left(5-6^x\right)\left(25^x-6\right)=0$ …2p

finalizare …1p

b) condiție $x\ge -\frac{1}{2}$ ; ridică la pătrat și obține $2x+1=9+x+8+6\sqrt{x+8}$ …1p

ridică din nou la pătrat și obține $x^2-32x+256=36x+288$ …1p

finalizare …1p

**2.** scrie $\log_{12}2=\frac{1}{2+\log_2 3}$ …1p

$a=\frac{\log_2 3}{4+\log_2 3}$ …2p

$\log_2 3=\frac{-4a}{a-1}$ …2p

Finalizare ….2p

**3.** găsește un $x_1\neq x_2$ pt. care $f(x_1)=f(x_2)$ și verifică ( ex. $\frac{1}{7}$ și $\frac{3}{14}$ ) …3p

finalizează …1p

$f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{Z}$ , deci nu e surjectivă …3p

**4.** $MN=\left|z_M-z_N\right|$ …1p

$MN=\left|\frac{z_A+k\cdot z_D}{1+k}-\frac{z_B+k\cdot z_C}{1+k}\right|$ …2p

$MN=\left|\frac{\left(z_A-z_B\right)+k\left(z_D-z_C\right)}{1+k}\right|$ …1p

$MN\le \frac{1}{k+1}\cdot\left|z_A-z_B\right|+\frac{k}{k+1}\cdot\left|z_D-z_C\right|$ …2p

Finalizare …1p

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**“ADOLF HAIMOVICI”**

**Etapa locală, 8 februarie 2020**

**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**

**BAREM - clasa a XI-a**

**1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...2p

pp. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 3k-1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...3p

dem. $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 3k+2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...1p

deci $A^n = \begin{pmatrix} 0 & n & 3n-1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 299 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ...1p

**2.** condiție $a > 0$ ...1p

amplifică cu conjugata și obține $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3+2x^2+x+1-\left(ax^2+bx+c\right)^2}{\sqrt{x^4+x^3+2x^2+x+1}+ax^2+bx+c} = 1$

...2p

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1-a^2\right)+x^3\left(1-2ab\right)+x^2\left(2-b^2-2ac\right)+x\left(1-2bc\right)+1-c^2}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)} = 1$$ ...1p

Condiții: $1-a^2=0$, $1-2ab=0$, $\dfrac{2-b^2-2ac}{1+a} = 1$ ...2p

Finalizare $a=1, b=\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{8}$ ...1p

**3.** a) inducție

verifică $P(1)$ ...1p

scrie $P(k)$ ...1p

dem. $P(k+1)$ ...1p

b) $f\left(2^{n+1}\cdot x\right)\le 2,(\forall)x\in\mathbb{R}$ cf.(1) ...1p

$f(x)\le \frac{1}{2^n}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ ...2p

$f(x)\le 1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\le\frac{3}{2}$ ...1p

**4.** a) $d_1=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ac & c^2-ab \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix}$ ...1p

$d_1=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b-a & c-a\end{vmatrix}$ ...2p

$d=0$ ...1p

b) $d_2=\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ y & z & x\end{vmatrix}$ ...1p

$d_2=(x+y+z)\begin{vmatrix} x-z & y-z \\ z-y & x-y\end{vmatrix}$ ...1p

$d_2=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$ ...1p

**Notă:**

Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.

Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**"ADOLF HAIMOVICI"**

**Etapa locală, 8 februarie 2020**

**FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII**

**BAREM - clasa a XII-a**

**1.** $x * 3 = 3 * x = 3$ ...1p

Fie $x = \frac{1}{101} * \frac{3}{101} * \ldots * \frac{301}{101}$ și $y = \frac{305}{101} * \ldots * \frac{501}{101}$ ...2p

$A = x * 3 * y$ ...2p

Finalizare $A = 3$ ...2p

**2.** a) Determină $e = -1$ ...1p

Determină $x' = \frac{-6x-7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$ ...1p

Singurul element simetrizabil este $-1$ ...1p

b) $x \circ (x \circ x \circ x \circ x) = -1 = e = (x \circ x \circ x \circ x) \circ x$ ...1p

$x \circ x' = x' \circ x = -1$ ...1p

Soluția $x = -1$ ...2p

**3.** $I = \int \frac{x^{106}\left(x^{107}+2\right) - x^{106}}{\left(x^{107}+2\right)^{213}} dx = \int \frac{x^{106}}{\left(x^{107}+2\right)^{212}} dx - \int \frac{x^{106}}{\left(x^{107}+2\right)^{213}} dx = I_1 - I_2$ ...2p

not. $x^{107} + 2 = t$ și obține $I_1 = -\frac{1}{107 \cdot 211} \cdot \frac{1}{\left(x^{107}+2\right)^{211}} + C$ ...3p

obține $f$ $I_2 = -\frac{1}{107 \cdot 212} \cdot \frac{1}{\left(x^{107}+2\right)^{212}} + C$ ...1p

finalizare ...1p

**4.** Scrie $I = \int \frac{x^{99}}{x^{100}\left(x^{100}+1\right)} dx$ ...1p

Notează $x^{100} = t \Rightarrow dt = 100x^{99}dx$ ...2p

Obține $I_1 = \frac{1}{100} \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \frac{1}{100}\left(\ln t - \ln(t+1)\right) + C$ ...2p

Finalizare $I = \frac{1}{100}\left(\ln x^{100} - \ln\left(x^{100}+1\right)\right) + C$ ...1p