

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 8 februarie 2020
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ȘTIINȚE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a IX-a**

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir neconstant pentru care $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $b_n = \frac{a_n}{n}, n \geq 1$ este o progresie aritmetică.
2. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $\left[\frac{4x+1}{6} \right] = \left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} + x$.
3. Arătați că în orice $\triangle ABC$ cu O centrul cercului circumscris și H ortocentrul său, are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
4. Fie $\triangle ABC$ și G centrul de greutate al său. O dreaptă d care trece prin G taie $[AB]$ în Q și $[AC]$ în P . Arătați că $\frac{BQ}{AQ} + \frac{CP}{AP} = 1$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 8 februarie 2020
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ȘTIINȚE SOCIALE
SUBIECTE - clasa a X-a**

1. Demonstrați că expresia de mai jos nu depinde de x :

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x ,$$

$$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, x > 0, x \neq 1 .$$

2. Se dă funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}(7 - 2\sqrt{x} - x)$.

- a) Arătați că domeniul de definiție este $D = [0, 9 - 4\sqrt{2})$
b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f .

3. a) Rezolvați ecuația: $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

- b) Demonstrați că $(\forall) x, y, z \in (1, \infty)$, are loc $\log_x y + \log_y z + \log_z x \geq 3$.

4. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.

Țimp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 8 februarie 2020

FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ȘTIINȚE SOCIALE

BAREM - clasa a IX-a

1. a) Se raționalizează și se obține $\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r}$, unde $a_n = a_1 + (n-1)r$...3p
- b) se raționalizează și se ajunge la $S = \frac{\sqrt{a_1 \cdot a_2} + a_1}{a_1 \cdot q - a_1} + \frac{\sqrt{a_2 \cdot a_3} + a_2}{a_2 \cdot q - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1} \cdot a_n} + a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot q - a_{n-1}}$...2p
- apoi $S = \frac{a_1(\sqrt{q}+1)}{a_1(q-1)} + \frac{a_2(\sqrt{q}+1)}{a_2(q-1)} + \dots + \frac{a_2(\sqrt{q}+1)}{a_2(q-1)} = \frac{n-1}{\sqrt{q}-1}$...2p
2. pune condiția $\Delta \geq 0 \Rightarrow a^2 - b \geq 0$...2p
calculează 5·5 cazuri posibile ...1p
determină 21 de cazuri favorabile ...3p
scrie probabilitatea $P = \frac{21}{25}$...1p
3. a) calculează și obține 2018 ...2p
b) calcul și demonstrație ...3p
c) arată că funcția e descrescătoare ...2p
4. a) demonstrație ...3p
b) înlocuiește în relația de la a) pe $\alpha = a$ și $\beta = b + c$ și obține $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c}$...1p
arată că $\frac{b+c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$...2p
finalizare ...1p

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct.

Orice soluție corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 8 februarie 2020

FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - FILOLOGIE, ȘTIINȚE SOCIALE

BAREM - clasa a X-a

1. Se trec toți logaritmi în baza 2 și se obține

$$E = \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x \quad \dots 3p$$

Se ajunge la $E = \log_2^2 x \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x \quad \dots 2p$

Se fac calcule și se ajunge la $E = \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x = 0 \quad \dots 2p$

2. a) Din condiția de existență $\Rightarrow 7 - 2\sqrt{x} - x > 0$

Not. $\sqrt{x} = t, t > 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 7 < 0 \quad \dots 1p$

Se obține $t \in (0, -1 + 2\sqrt{2}) \quad \dots 2p$

De unde $\Rightarrow x \in (0, 9 - 4\sqrt{2}) \quad \dots 1p$

b) cum $x \in \mathbb{Z}$ și $x \in (0, 9 - 4\sqrt{2}) \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \dots 2p$

se verifică și se obține $f(3) = 2 \quad \dots 1p$

3. a) se aduce ecuația la forma $5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x = 30 + 6^x \cdot 25^x \quad \dots 1p$

se obține $(5 - 6^x)(25^x - 6) = 0 \quad \dots 2p$

finalizare $\dots 1p$

b) folosind inegalitatea mediilor, se obține $\frac{\log_x y + \log_y z + \log_z x}{3} \geq \sqrt[3]{1} \quad \dots 2p$

de unde rezultă inegalitatea cerută $\dots 1p$

4. se notează cu x numărul de pagini citite pe zi și se ajunge la ecuația

$$31 \cdot x = \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{x}{4} + 30 \right) \quad \dots 3p$$

se obține $x = 20 \quad \dots 3p$

cartea are 620 de pagini $\dots 1p$

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct. Orice soluție corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.