CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„TRAIAN LALESCU", 2005
Clasa a V-a

1. Câte cifre are numărul $5^{19} \cdot 8^7$?

2. Pentru m, $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $m \star n = m^n$.

a) Care este ultima cifră a numărului $2 \star 2005 - 2005 \star 2$?

b) Calculați $\dfrac{2 \star [2 \star (2 \star 2)]}{[(2 \star 2) \star 2] \star 2}$.

3. Să se determine numerele naturale x, y, z care verifică egalitatea

$$\frac{\overline{x2}_{(y)}}{\overline{y2}_{(z)}} = \frac{\overline{4z}_{(y+2)}}{\overline{y2}_{(x+2)}}.$$

4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim numărul $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Determinați numerele prime cu proprietatea $77! + 1 < p < 77! + 77$.

Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele întregi x, y, z știind că

$$(x^2 + 2^2)(y^2 + 2^3)(z^2 + 2^4) = 2^{10}.$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $p > 2$ și mulțimea $A = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$.

- **a)** Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care A conține exact 6 fracții ireductibile.
- **b)** Arătați că mulțimea A are întotdeauna un număr par de fracții ireductibile.

3. Se consideră triunghiul ABC cu $AB < AC$ și punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB)$ astfel încât $(AD) \equiv (AB)$ și $(AE) \equiv (AC)$.

- **a)** Demonstrați că $(BC) \equiv (DE)$.
- **b)** Fie $M \in (DE)$ și $N \in (BC)$ astfel ca $\sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle NAC$ și $BC \cap DE = \{O\}$. Arătați că triunghiul OMN este isoscel.

4.
- **a)** Într-un triunghi ABC, unghiurile sunt proporționale cu numerele 1, 2, 3. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **b)** Fie E un punct pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic și F și G simetricele sale față de catete. Demonstrați că punctele F, A, G sunt coliniare.

Clasa a VII-a

1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu bazele $[AB]$ și $[CD]$, iar O punctul de intersecție al diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $[OA]$, $[BC]$, $[OD]$, arătați că

$$\triangle MNP \text{ este echilateral } \iff AC = AB - DC.$$

2. Vârfurile unui poligon $A_1A_2\ldots A_n$ sunt colorate cu două culori. Dacă numărul laturilor $[A_iA_{i+1}]$ (unde $i = \overline{1,n}$ și $A_{n+1} = A_1$) care au capetele colorate identic este egal cu numărul laturilor cu capetele colorate diferit, arătați că n este multiplu de 4.

3. Fie $[AA']$ și $[BB']$ bisectoare interioare în triunghiul ABC și $M \in [A'B']$. Arătați că distanța de la M la dreapta AB este egală cu suma distanțelor de la M la dreptele AC și BC.

4. O fracție de forma $\dfrac{1}{n}$, cu $n \geq 2$, se numește *fracție egipteană*.

a) Determinați câte o descompunere a numărului 1 în sumă de 3, 4, respectiv 5 fracții egiptene distincte.

b) Arătați că orice număr rațional pozitiv se poate scrie ca o sumă de fracții egiptene distincte.

Clasa a VIII-a

1. Să se afle numerele naturale n astfel încât $x - y \in \mathbb{N}$, unde x, $y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x^3 = n^2 + n$ și $y^3 = n^2 - n$.

2. Fie a, b, $c \in \mathbb{R}$ diferite două câte două. Să se arate cădacă are loc relația

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

atunci și $\dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2} = 0$.

3. Să se verifice inegalitățile:

a) $|x-1| + |x| + |x+1| \geq 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $|x| + |x-1| + |x+2| + |x-3| + \cdots + |x+2004| + |x-2005| \geq 1003 \cdot 2005$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4. În triunghiul echilateral ABC se consideră mediana AA', $A' \in (BC)$. Să se afle mulțimea punctelor $M \in (AA')$ pentru care există puncte E în spațiu cu proprietățile:

$$ME \perp (ABC),\ BE \perp EC \text{ și } AE \perp EA'.$$

Calculați valorile posibile ale segmentului EM.

Clasa a XII-a

1. Fie A un inel cu patru elemente. Demonstrați că A este corp dacă şi numai dacă ecuația $x^2+x+1=0$ are o rădăcină în A.

***

2. Sa se arate că mulțimea izomorfismelor de la grupul $(\mathbb{Q},+)$ în el însuşi împreună cu operația de compunere formează grup care este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

***

3. Fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție convexă, de două ori derivabilă cu f'' continuă. Demonstrați inegalitatea:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx \geq 0$$

***

4. Demostrați că funcția $F:(1,\infty)\to(\ln 2,\infty)$ definită prin:

$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ este bijectivă.

***

Barem de corectare
Clasa a V-a

1. $8^7=2^{21}$ (1p)

$5^{19}\cdot 8^7=5^{19}\cdot 2^{19}\cdot 2^2=10^{19}\cdot 2^2$ (3p)

$10^{19}\cdot 2^2=4\underbrace{00\ldots0}_{19 \text{ zerouri}}$ (2p)

finalizare – numărul are 20 cifre (1p)

2 i. $2*2005-2005*2=2^{2005}-2005^2$ (1p)

$u(2^{2005})=2$ (1p)

$u(2005^2)=5$ (1p)

finalizare $u(2^{2005}-2005^2)=7$ (1p)

ii. numărătorul 2^{16} (1 p)

numitorul 2^8 (1 p)

finalizare $\frac{2^{16}}{2^8}=2^8$ (1p)

3. Condiții de existență:

(1) $y<z<y+2 \Rightarrow z=y+1$ (1p)

(2) $x<y<x+2 \Rightarrow y=x+1$ (1p)

(1) şi (2) $\Rightarrow z=x+2$ (*) (1p)

(*)$\Rightarrow \overline{x2}_{(y)}=\overline{4z}_{(y+2)}$ (1p)

deduce: $x(x-4)=12$ (2p)

finalizare: $x=6$, $y=7$, $y=8$ (1p)

4. $p=77!+k$

$2\leq k\leq 76$ (3p)

$p=77!+k=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k\cdot 77+k$

$=k[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)(k+1)+1]$ (3p)

p compus $\Rightarrow$ nu există p număr prim care satisface cerința (1p)

Clasa a VI-a

1.

$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$ 1p

$x^2+2^2 \geq 2^2;\ y^2+2^3 \geq 2^3;\ z^2+2^4 \geq 2^4$ 2p

$\Rightarrow (x^2+2^2)(y^2+2^3)(z^2+2^4) \geq 2^9$. 1p

C I:

$x^2+2^2=2^3;\ y^2+2^3=2^3;\ z^2+2^4=2^4 \Rightarrow (x, y, z) \in \{(2,0,0); (-2, 0,0)\}$ ...1p

C II:

$x^2+2^2=2^2;\ y^2+2^3=2^4;\ z^2+2^4=2^4 \Rightarrow x=0;\ y^2=8$ nu convine; $z=0$ ...1p

C III:

$x^2+2^2=2^2;\ y^2+2^3=2^3;\ z^2+2^4=2^5 \Rightarrow (x; y; z) \in \{(0,0,4); (0,0,-4)\}$ 1p

2. a. Observăm că n=7 ....1p

Demonstrează că n=7 ....2p

b. $(k,n)=1 \Rightarrow (n, n-k)=1$ 2p

analizează cazul $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n} \Rightarrow n=2k$ 1p

$\frac{k}{2k}$ reductibilă + finalizare 1p

3.a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$ 3p

b) din a) $\Rightarrow \sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ 1p

$\Delta AME \equiv \Delta ANC$ (LUL) $\Rightarrow$ EM=NC 1p

$\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle ACE$, ΔOEC isoscel $\Rightarrow$ OC= OE............1p

$\Rightarrow$ OM= ON$\Rightarrow$ ΔMON isoscel 1p

4.a)

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ 2p

$\Rightarrow a=30^\circ,\ b=60^\circ,\ c=90^\circ$ 1p

b) ΔAEF isoscel $\Rightarrow$ (AB bisectoare $\sphericalangle FAE \Rightarrow m(\sphericalangle FAB) = m(\sphericalangle BAE) = x$ 1p

ΔAEG isoscel $\Rightarrow$ (AC bisectoare $\sphericalangle EAG \Rightarrow m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle CAG) = y$ 1p

$m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ \Rightarrow x+y=90^\circ$ 1p

$m(\sphericalangle FAG) = 2x+2y = 2 * m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ \Rightarrow$

F, A, G coliniare 1p

Clasa a VII-a

Problema 1

Start .... 1 p

[⇒] observă că $MP = \frac{1}{2} \cdot AD$ .... 1 p

deduce că $MN = NP = \frac{1}{2} \cdot BC$ .... 1 p

deduce că ΔBMC şi ΔBPC sunt dreptunghice .... 1 p

deduce că ΔAOB şi ΔCOD sunt echilaterale .... 1 p

obţine că AC=AB+DC .... 1 p

[⇐] deduce că ΔAOB şi ΔCOD sunt echilaterale .... 1 p

deduce că ΔBMC şi ΔBPC sunt dreptunghice .... 1 p

obţine că $MN = NP = \frac{1}{2} \cdot BC$ =MP .... 1 p

obţine că ΔMNP este echilateral .... 1 p

Total 10 p

Problema 2

Start .... 1 p

Arată că n este par, $n \overset{not}{=} 2 \cdot k$ .... 3 p

Parcurgând laturile poligonului găseşte că numărul laturilor cu capetele colorate diferit între vârfurile A_1şi A_i este

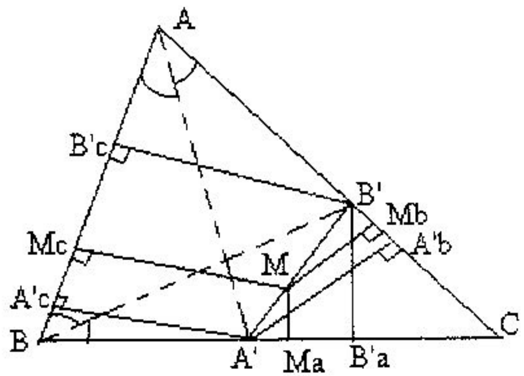
par dacă culoarea lui A_i este culoarea lui A_1

impar dacă culoarea lui A_i nu este culoarea lui A_1 .... 3 p

deduce că şi k este par .... 2 p

obţine că n $\vdots$ 4 .... 1 p

Total 10 p



Problema 3

Start .... 1 p

Desen .... 1 p

Observă că : d(A',AB)=d(A',AC), d(B',AB)=d(B',BC)...1 p

Dacă M_a , M_b , M_c sunt proiecţiile lui M pe BC, CA, AB, A'_b, A'_c , proiecţiile lui A' pe AC, AB, B'_a , B'_c proiecţiile lui B' pe AC, AB obţine că $\Delta B'MM_b \sim \Delta B'A'A'_b$ şi $\Delta A'MM_a \sim \Delta A'B'B'_a$ .... 1 p

Deduce că $\frac{MM_a}{B'B'_a} = \frac{MA'}{A'B'}$ şi $\frac{MM_b}{A'A'_b} = \frac{MB'}{A'B'}$ .... 1 p

Obţine $MM_a + MM_b = \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_a + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_b =$

$= \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_c + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_C$ .... 2 p

Arată că $MM_c = \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_c + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_c$ .... 2 p

Obţine că $MM_a + MM_b = MM_c$ .... 1 p

Total 10 p

Problema 4

Start ....1 p

a) Găseşte $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ....1 p

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ (sau alta) 1p

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}$ (sau alta) ....1 p

b) Scrie $\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+....+\frac{1}{n}$ (m fractii) 1p

şi înlocuieşte în caz de repetiţie $\frac{1}{k}\ cu\ \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$ 4p

Finalizare 1p

Total 10 p

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

1. Analizează cazul n=0 ....1p
2. Arată că x-y< 2.Prin reducere la absurd presupunem că $x-y\geq 2 \Leftrightarrow x\geq y+2 \Leftrightarrow n\geq 3y^2+6y+4 \Leftrightarrow$ $n\leq\frac{-6+\sqrt{12n-12}}{6}$ 2p
3. $y^3=n(n-1)\Rightarrow y^3\geq (n-1)^2$ 2p
4. Arattă că inegalitatea $(n-1)^2\leq(\frac{-6+\sqrt{12n-12}}{6})^3$ nu are loc pentru $n\geq 1$ ..2p

Subiectul 2

1. Aduce la acelaşi numitor 1p
2. Numărătorii sunt egali cu 0 ....1p
3. Înmulţeşte cu (a-b)(b-c)(c-a) 1p
4. Înmulţeşte cu $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ 1p
5. Finalizarea 3p

Subiectul 3

i) Rezolvă prin explicitarea modulului sau folosirea proprietăţilor modulului 3p

ii). Arată că $|x-n|+|x+n+1|\geq 2n+1$ 2p

Finalizarea calculului 2p

Subiectul 4

1. Figura 1p
2.Observă [EA'] mediana în ΔECB 1p
3.Determină $EA'=\frac{a}{2}$, $EA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 2p
4. Determină $EM=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ şi $A'M=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ 2p
5. Specifică poziţia punctului 1p

Clasa a IX-a

Problema 1.

Start 1p
Arată că $\overline{NR}=\overline{MQ}+\overline{PS}$ 4p
Obţine $NR^2=MQ^2+PS^2+2\overline{MQ}\cdot\overline{PS}$ 2p
Finalizare 3p
Total 10p

Problema 2.

Start 1p
Alege reperul (de exemplu B(0,0), A(0,1), C(1,0), D(1,1)) .2p
Arată prin inducţie după n că toate punctele mulţimii M_n au cel puţin câte o coordonată pară 5p
Deduce că $D\notin M_n$, $(\forall)$ $n\geq 3$ 2p
Total 10p

Problema 3.

Start 1p
Observă că g(0)=0 ....1p
Arată că f(0)=0 ....2p
Arată că $f(x)\geq g(x)$ şi deduce că $f(x)\geq g(x)$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$ 2p
Observă că f este impară 1p
Arată că $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ şi deduce că $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $(\forall)$ $x,y\in\mathbb{R}$ 3p
Total 10p