Clasa a IX-a

1. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, respectiv $[FA]$ ale hexagonului $ABCDEF$. Arătați că:

$$MQ \perp PS \iff MQ^2 + PS^2 = NR^2.$$

2. Fie $ABCD$ un pătrat în planul $\mathscr{P}$ și $M_3 = \{A, B, C\}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, definim mulțimea

$$M_{n+1} = M_n \cup \{Z \subset \mathscr{P} \mid (\exists)\, X,\, Y \subset M_n \text{ astfel încât } \overline{XZ} = 2 \cdot \overline{XY}\}.$$

Aflați valoarea de adevăr a afirmației:

Există $n \geq 3$ cu proprietatea că $D \in M_n$.

3. Fie f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

i. g este impară;
ii. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$;
iii. $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Arătați că:

a) $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$.

4. Fie $\triangle ABC$ un triunghi fixat în plan.

a) Arătați că pentru orice punct M din plan există un unic triplet (α, β, γ) de numere reale cu proprietatea că $\alpha + \beta + \gamma = 1$ și

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC},$$

pentru orice punct O din plan.

((α, β, γ) se numesc *coordonatele baricentrice standard ale punctului M în raport cu* $\triangle ABC$ și notăm $M(\alpha, \beta, \gamma)$)

b) Determinați coordonatele baricentrice ale mijloacelor A_1, B_1, C_1 ale laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului, ale picioarelor A', B', C' ale înălțimilor din A, B, respectiv C și ale mijloacelor A_2, B_2, C_2 ale înălțimilor $[AA']$, $[BB']$, respectiv $[CC']$.

c) Arătați că dreptele A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 sunt concurente.

Clasa a X-a

1. **a)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x = x$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție strict convexă, adică

$$f(tx + (1-t)y) < t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y),\ \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

Câte soluții reale poate avea ecuația $f(x) = x$?

Justificați răspunsurile.

2. Arătați că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea:

$$|z-1| \cdot |z-i| + |z| \cdot |z - (\mathrm{i}+1)| \geq 1.$$

Când are loc egalitatea?

3. Fie $f,\, g,\, h : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ funcții strict crescătoare astfel încât $\dfrac{h}{g}$ și $\dfrac{h}{f}$ sunt funcții strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și $h(1) = f(1) + g(1)$.

Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} f(x) + g(y) = h(x) \\ f(y) + g(z) = h(y) \\ f(z) + g(x) = h(z). \end{cases}$

4. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \lg \frac{n+2}{n+1} < \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lg \frac{n+1}{n}.$$

Clasa a XI-a

1. Pentru un punct M din interiorul triunghiului isoscel VA_1A_2, se notează cu d_1 distanța de la M la VA_1, cu d_2 distanța de la M la VA_2 și cu d distanța de la M la A_1A_2. Precizați mulțimea punctelor M pentru care $d = \sqrt{d_1 \cdot d_2}$. Formulați o generalizare în spațiu, plecând de la un con.

2. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care

$$g(g(x)) \cdot g(x) = 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că ecuația $g(x) = x$ admite o soluție unică și că $g(x) \leq x$, $\forall\ x \geq 1$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$.

a) Dacă $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ sunt rădăcini de ordinul n ale unității,

$f = a_1 + a_2X + a_3X^2 + \dots + a_nX^{n+1}$, iar $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$.

Considerând produsul $A \cdot W$, arătați că $\det(A) = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1})$.

b) Rezolvați ecuația $\det(A - xI_n) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Arătați cădacă există $\ell \in \mathbb{C}$ astfel ca $A^\ell = O_n$, atunci $A = O_n$.

4. Fie $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ o funcție cu proprietatea

$$\min(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \cdot \max(f(x), f(y)) \leq \max(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \cdot \min(f(x), f(y)), \ \forall\, x, \ y > 0.$$

Demonstrați că f este continuă și că șirul recurent următor este convergent:

$$x_0 \in (0, +\infty), \ x_{n+1} = f(x_n), \ \forall\, n \geq 0.$$

Clasa a XII-a

1. Fie A un inel cu patru elemente. Demonstrați că A este corp dacă și numai dacă ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ are o rădăcină în A.

2. Să se arate că mulțimea izomorfismelor de la grupul $(\mathbb{Q}, +)$ în el însuși împreună cu operația de compunere formează grup care este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

3. Fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ o funcție convexă, de două ori derivabilă, cu f'' continuă. Demonstrați inegalitatea:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

4. Demonstrați că funcția $F : (1, +\infty) \to (\ln 2, +\infty)$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$ este bijectivă.

Subiectul 4

1. Figura 1p
2. Observă [EA'] mediana în ΔECB 1p
3. Determină $EA' = \frac{a}{2}$, $EA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ 2p
4. Determină $EM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ şi $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ 2p
5. Specifică poziţia punctului 1p

Clasa a IX-a

Problema 1.

Start 1p
Arată că $\overline{NR} = \overline{MQ} + \overline{PS}$ 4p
Obţine $NR^2 = MQ^2 + PS^2 + 2\,\overline{MQ} \cdot \overline{PS}$ 2p
Finalizare 3p
Total 10p

Problema 2.

Start 1p
Alege reperul (de exemplu B(0,0), A(0,1), C(1,0), D(1,1)) .2p
Arată prin inducţie după n că toate punctele mulţimii M_n au cel puţin câte o coordonată pară 5p
Deduce că $D \notin M_n$, $(\forall)\ n \geq 3$ 2p
Total 10p

Problema 3.

Start 1p
Observă că g(0)=0 ....1p
Arată că f(0)=0 ....2p
Arată că $f(x) \geq g(x)$ şi deduce că $f(x) \geq g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ 2p
Observă că f este impară 1p
Arată că $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ şi deduce că $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}$ 3p
Total 10p

Problema 4.

Start 1p

a) Deduce existența 2p

Arată unicitatea 1p

b) Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A_1, B_1, C_1 ....1p

Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A', B', C' 1p

Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A_2, B_2, C_2 ....1p

c) Consideră $A_1A_2 \cap B_1B_2 = \{K\}$ și determină coordonatele baricentrice ale punctului K 2p

Arată că $K \in C_1C_2$ 1p

Total 10p

Clasa a X-a

I.a) Ecuația nu are soluții negative

- dacă $a \geq 0$ este soluție atunci $a = 2^a \geq 1$
- dacă $x \geq 1$ atunci $2^x \geq 2^{[x]} \geq [x]+1 > x$ (cu inducție!) 3p

b) - $(x)=2^x+x-1$ este strict convexă și ecuația $f(x)=x$ are o singură soluție 1p

- $f(x)=x^2$ este strict convexă și $f(x)=x$ are două soluții distincte 1p
- ecuația nu poate avea mai mult de două soluții.

<u>prin absurd</u>. Fie $x_1<x_2<x_3$ soluții distincte ale ecuației $f(x)=x$. Atunci $\exists\, t \in [0,1]$ astfel încât $x_2 = t\cdot x_1 + (1-t)\cdot x_3$ și $x_2 = f(x_2) < t\cdot f(x_1) + (1-t)\cdot f(x_3) = t\cdot x_1 + (1-t)\cdot x_3 = x_2$ (contradicție!) 2p

II. - $|(z-1)||(z-i)| = |z^2 - z(1+i) + i|$

- $|z|\cdot|z-(1+i)| = |-z^2 + z\cdot(1+i)|$ 2p
- $|z-1|\cdot|z-i| + |z|\cdot|z-(1+i)| \geq |i| = 1$ 2p
- egalitatea se realizează dacă $\mathrm{Re}(z^2 - z(1+i)) = 0$ cu detalii **3p**

III. - scrie egalitatea

- $f(x)+g(x)-h(x)+f(y)+g(y)-h(y)+f(z)+g(z)-h(z)=0$

și găsește soluția (1,1,1) 2p

- $g(y) = \underbrace{f(x)\left[\frac{h(x)}{f(x)} - 1\right]}_{p(x)}$

funcția p este strict crescătoare și $p(1)=g(1)$.

dacă $x>1$ atunci $g(y)>g(1)$ deci $y>1$. Analog $z>1$ **2p**

- $f(x)+g(x)-h(x) = h(x)\cdot\underbrace{\left[\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} - 1\right]}_{q(x)}$

- funcţia q este strict descrescătoare atunci q(x)<q(1) pentru x>1 deci f(x)+g(x)-h(x)<0, adică sistemul nu are soluţii cu x>1 ....2p

- analog se tratează cazul x<1 ....1p

IV. - scrie inegalitatea sub forma:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$ 1p

- ajunge la inegalitatea echivalentă:

$$\frac{(n^2+2n)(2n+3)}{n^2+2n+1}-1<\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{2n}$$ 3p

- foloseşte inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{k}\geq 1+\frac{k}{n^2+2n}+C_k^2\frac{1}{(n^2+2n)^2}$$ 2p

- finalizare 1p

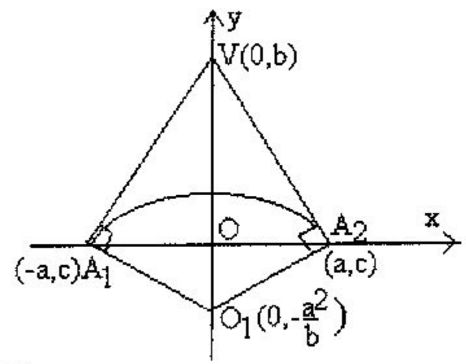
Clasa a XI-a

1)

- calculează $d_1=\frac{|bx+ay-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $d_2=\frac{|bx-ay+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ....1 p
- explicitează modulele în funcţie de poziţia originii 1p
- din relaţia din enunţ deduce

$$y^2=\frac{(ab-bx-ay)(bx-ay+ab)}{a^2+b^2}$$ 1p

- obţine ecuaţia $x^2+\left(y+\frac{a^2}{b}\right)^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{b^2}$ 1p
- precizează locul geometric $C\cap Int(VA_1A_2)$ 1p
- generalizează locul geometric în spaţiu 1p



2)

- $g(x)=y\in \mathrm{Im}(g)\Longrightarrow g(y)=\frac{1}{y}$ 1p

- $\left.\begin{array}{l}O\notin \mathrm{Im}(g)\\ g-continu\check{a}\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}g(x)>0\\ (<0)\end{array}$ $(\forall)$ x 1p

- consideră funcţia g(x)-x - continuă(are P.D.) şi presupune că

$g(x)-x\neq 0 \Longrightarrow g(x)-x \begin{matrix} g(x)>0 \\ (<0) \end{matrix}$

- dacă $g(x)-x>0$ alege $x_0>1$ şi obţine că $g(g(x_0))>g(x_0)>x_0>1$, deci $g(g(x_0))\cdot g(x_0)\neq 1$ contradicţie dacă $g(x)-x<0$ alege $x_0<-1$ şi obţine analog contradicţie 1p
- obţine că $(\exists)\ c\in\mathbb{R}: g(c)-c=0$ 1p
- dacă c este sol a ec. $g(x)-x=0 \Rightarrow c^2=1 \Rightarrow c=1$ sol unică pt. $g(x)>0$ şi $c=-1$, sol unică pt $g(x)<0$ 1p
- presupune că $g(x)-x>0\ \forall\ x\geq 1$, deci $\exists\ x_0$: $g(x_0)>x_0>1 \Longrightarrow g(g(x_0))=\dfrac{1}{g(x_0)}<1$ 1p
- conform P.D. $(\exists)\ \varepsilon\in(x_0,g(x_0)): g(\varepsilon)=\varepsilon,\ \varepsilon>x_0>1$ contradicţie 1p

3.a) – calculează

$$AW=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \dots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix} \overset{not}{=} B \quad .....1p$$

- calculează $\det(B)=\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)\cdot\det(W)$ 1p
- justifică $\det(W)\neq 0$ 0,5p
- $\det(A)=\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)$ 0,5p

b) – consideră polinomul $g=a_1-x+a_2X+a_3X^2+\dots+a_nX^{n-1}$ $(g=f-x)$ şi reduce la punctul a) $\Longrightarrow \det(A-xI_n)=\prod_{k=0}^{n-1} g(\varepsilon_k)$ 1p
- din $\det(A-xI_n)=0$, deduce că $x_k=f(\varepsilon_k)$, $k=\overline{1,n}$ 1p

c) – din $A^l=O_n$ obţine că $x_k=0$, $k=\overline{0,n-1}$ 1p
- conform punctului b) polinomul $f=\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ cu grad $f\leq n-1$ are n rădăcini distincte $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1} \Longrightarrow f=0 \Longrightarrow a_k=0$, $k=\overline{1,n}$ ...1p

4.
- alege $x_n\to x>0$ şi $f(x_{n_k})\to y$ 1p
- $\min\{\sqrt{x_{n_k}},\sqrt{x}\}\cdot\max\{f(x),f(x_{n_k})\}\leq \max\{\sqrt{x_{n_k}},\sqrt{x}\}\cdot\min\{f(x),f(x_{n_k})\}$ 1p
- face $x\to\infty$ şi obţine $\sqrt{x}\max\{f(x),y\}\leq\sqrt{x}\min\{f(x),y\}\Rightarrow f(x)=y$ 1p
- presupune prin reducere la absurd că $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ nu are puncte fixe 1p
- consideră funcţia $f(x)-x$, $(\forall)\ x>0$. Dacă $f(x)>x$, $(\forall)\ x>0$ observă conform ipotezei că $x_{n+1}=f(x_n)>x_n \Longrightarrow x_n$ crescător şi nemărginit superior. At.

$$\sqrt{x_n}\cdot x_{n+k+1}\leq\sqrt{x_{n+k}}\cdot x_{n+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{x_n}}{x_{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{x_{n+k+1}}}\xrightarrow{k\to\infty}0$$

contradicţie 1p
- pentru $f(x)-x<0$, $(\forall)\ x>0$ analog 1p
- deduce că f are un punct fix, iar (x_n) converge la acesta 1p

Clasa a XII-a

I. $\Rightarrow$ Fie A={0,1,a,b} corp $\Rightarrow$ A* = {1,a,b}
grup multiplicativ 1p
Obține $a^3=1 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1)=0$ 1p
A nu are divizori ai lui zero $\Rightarrow$ $a \neq 1 \Rightarrow a^2+a+1=0$ 1p
$\Leftarrow$ Fie A={0,1,a,b} inel $\Rightarrow$ ecuația $x^2+x+1=0$ nu are ca rădăcini pe 0 şi 1 ....2p
Dacă a soluție $\Rightarrow$ a(a+1)= -1. Dacă a= -1 $\Rightarrow$ 0= -1 absurd $\Rightarrow$ $a+1 \neq 0$ 1p
Deci a+1=b $\Rightarrow$ a,b inversabile $\Rightarrow$ A corp 1p

II. Fie Izom(Q)={f:Q→Q / f izomorfism de grupuri}.
Dacă f(1)=0 $\Rightarrow$ f(2)=f(1)+f(1)=0 $\Rightarrow$ f nu e injectivă, fals aşadar $f(1)\neq 0$ 1p
Arată $f(n)=n\cdot f(1)$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ 1p
Arată $f(k)=k\cdot f(1)$, $\forall$ $k\in\mathbb{Z}$ 1p
Arată $f(r)= r\cdot f(1)$, $\forall$ $r\in\mathbb{Q}$ 1p
Arată $(f\circ g)(r)=f(g(r))=f(r\cdot g(1))=r\cdot f(1)\cdot g(1)$,
$\forall$ f, g $\in$ Izom(Q) 1p
Fie F:(Izom(Q),$\circ$) $\rightarrow$(Q*,$\cdot$) dată prin F(f)=f(1) 1p
Arată F bijectivă $\Rightarrow$ F izomorfismul cerut 1p

III.

Fie $I=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \sin x\cdot f(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cdot\sin x\,dx$ 2p

Deduce $I=(\cos x)\cdot f'(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x)\cdot\cos x\,dx$ 1p

Deduce $I=\int_0^{2\pi} f''(x)dx - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x\,dx$ 2p

f convexă $\Rightarrow f''(x)\geq 0, \forall x\in[0,2\pi]$ 1p

Obține $I=\int_0^{2\pi} f''(x)(1-\cos x)dx \geq 0$ 1p

IV. Fie f:(1,∞)→ℝ, f(t)=$\frac{1}{\ln t}$ continuă $\Rightarrow$

$F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}>0, \forall x\in(1,\infty)$, F strict crescătoare deci F injectivă 1p

$F(x)\geq (x^2-x)\cdot \min\limits_{x\leq t\leq x^2}\frac{1}{\ln t}=\frac{x^2-x}{\ln x^2}$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\infty$ 1p

Obține $F(x)=\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^u}{u}du \Rightarrow F(x)<e^{2\ln x}\cdot\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{1}{u}du = x^2\cdot\ln 2$ .1p

F(x)> xln2 ....1p

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} F(x)=\ln 2 \Rightarrow$ F surjectivă 1p