Clasa a IX-a

1. Fie x, y, z trei numere pozitive care satisfac simultan condițiile:

$$x \leqslant 1,\ x + y \leqslant 5,\ x + y + z \leqslant 14.$$

Determinați valoarea maximă a sumei $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

2. Pe laturile $[BC]$, respectiv $[AC]$, ale triunghiului ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = m \in (0, \infty).$$

Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, respectiv cu F intersecția dreptelor CM și AB.

a) Exprimați rapoartele $\frac{AM}{MD}, \frac{BM}{ME}, \frac{CM}{MF}$ în funcție de m.

b) Exprimați vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ și de m.

c) Demonstrați că dacă $m = 1$, atunci există un triunghi cu laturile paralele și congruente respectiv cu AM, BM, CM.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\lfloor x \rfloor + b\{x\}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că f este o funcție impară dacă și numai dacă $a = b$.

4. Fiecare punct al planului se colorează cu una din culorile **roșu** sau **albastru**. Demonstrați că există în plan un dreptunghi cu toate vârfurile de aceeași culoare.

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} 3^x + 4^y = 5^z \\ 3^y + 4^z = 5^x \\ 3^z + 4^x = 5^y. \end{cases}$$

2. Să se demonstreze că

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4.$$

3. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_k| \leqslant 1$, $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant n$. Să se demonstreze că există o alegere a semnelor $+$ sau $-$ pentru care

$$|z_1 \pm z_2 \pm z_3 \pm \cdots \pm z_n| \leqslant \sqrt{2}.$$

4. Un cub cu latura 2006 este împărțit în cubulețe de latură 1. Se aleg la întâmplare $\dfrac{3 \cdot 2006^2}{2}$ dintre aceste cubulețe. Să se demonstreze că există un triunghi dreptunghic având vârfurile în centrele unor cubulețe alese și catetele paralele cu muchiile cubului.

Clasa a XI-a

1. Punctele $X(5,4,0)$, $Y(3,0,2)$ și $Z(1,8,4)$ sunt vârfuri ale unui cub. Determinați coordonatele centrului cubului.

2. Fie $m \in \mathbb{N}$ și funcția $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $f(X) = X^m$. Arătați că f este surjectivă dacă și numai dacă $m = 1$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție pentru care există $L > 0$ astfel ca

$$|f(x) - f(y)| \geqslant L|x - y|,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Arătați că f este surjectivă dacă și numai dacă este continuă.

4. Determinați toate funcțiile continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(\forall)\, x \in \mathbb{R},\ (\exists)\, a, b \in (0,1),\ a + b = 1 \text{ astfel ca } g(x) = a \cdot g(ax) + b \cdot g(bx).$$

Clasa a XII-a

1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Demonstrați că șirul cu termenul general $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\int_1^2 f\left(\frac{x}{2^k}\right)dx$ este convergent și calculați limita sa.

2. Să se studieze dacă există corpuri $(K,+,\cdot)$ cu proprietatea că grupurile $(K,+)$ și $(K^*,\cdot)$ sunt izomorfe.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit care admite doar două subgrupuri proprii H_1 și H_2, unde $\mathrm{ord}(H_1)=2$, $\mathrm{ord}(H_2)=n$, n este un număr prim. Să se determine $\mathrm{ord}(G)$.

4. Fie n un număr natural impar și $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$. Să se arate că există $x_0\in[0,1]$ astfel ca

$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt=[f(x_0)]^n.$$