Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a V-a

1. Scrieţi în ordine crescătoare şirul multiplilor lui **3**: **0, 3, 6, 9,12, 15, 18 ….** şi apoi şirul corespunzător sumelor cifrelor din primul şir: **0, 3, 6, 9, 3, 6, 9, …**

   a. De câte ori apare numărul **2008** în cel de-al doilea şir ?
   b. Care sunt primele două numere din primul şir cărora le corespunde în al doilea şir numărul **2007** ?
   c. Cineva afirmă că numărul **2007** apare în cel de-al doilea şir de cel mult **1001** ori. Are el dreptate ? (Argumentaţi răspunsul)

D. Miheţ

2. Să se scrie $\mathbf{35^{2007}}$ ca sumă de trei pătrate.

Prelucrare Adara Blaga

3. Fie **x, y, z, v, w** numere naturale. Ştiind că

$$2^{x+y+z} + 2^{y+z+v} + 2^{z+v+w} + 2^{v+w+x} = 1089,$$

arătaţi că $\mathbf{x + y + z + v + w}$ este pătrat perfect.

Prelucrare Adara Blaga

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 2 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a VI-a

1. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive nenule. Arătaţi că unul dintre unghiuri are măsura de 60^0.

   * * *

2. Arătaţi că numărul $N=4^{2007}+1$ nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

   Răzvan Tudoran

3. Din punctul O se duc în sens invers acelor de ceasornic semidreptele [Ox, [Oy, [Oz şi [Ot astfel încât $<xOy \equiv <zOt$ şi $<yOz \equiv <xOt$. Fie $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$, $D \in (Ot$, astfel încât $[OA] \equiv [OC]$, $[OB] \equiv [OD]$. Considerăm un punct $P \in [CD]$ şi $\{Q\} = PO \cap AB$.
   Arătaţi că $[OP] \equiv [OQ]$.

   Maria Miheţ

4. Spunem că un număr natural n are proprietatea *P* dacă suma tuturor divizorilor săi naturali este 2n.
   - Daţi exemplu de un număr natural care are proprietatea *P*.
   - Arătaţi că niciun pătrat perfect nu are proprietatea *P*.

   Răzvan Tudoran

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 2 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că picioarele perpendicularelor din A pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor B şi C sunt patru puncte coliniare.

* * *

2. În patrulaterul convex $ABCD$ se ştie că $AC \perp CB$, $BD \perp DA$ *si* $DC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$. Calculaţi $m(\angle AOB)$, unde O este punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului.

D. Miheţ

3. Determinaţi cel mai mare număr de numere naturale pe care le putem alege din mulţimea $M = \{1, 2, 3, ..., 2007\}$ astfel ca suma oricăror două numere alese să se dividă cu 10.

Maria Pop, Cluj Napoca

4. Fie x şi y două numere reale. Să se arate că $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ dacă şi numai dacă $x+y=0$.

S. Birăuaş

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 2 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a VIII-a

1. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{\sqrt{2}+\sqrt{2007}} \in \mathbf{Q}.$

D. Comănescu

2. Fie numerele reale x şi y cu proprietatea că $x, y \geq 1$. Notăm :

$$E(x,y) = \frac{x}{2x+y+1} + \frac{y}{x+2y+1}.$$

i) Să se arate că : $\dfrac{1}{2} \leq E(x,y) < \dfrac{2}{3}$.

ii) Să se arate că dacă $a \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, atunci există $x, y \geq 1$ astfel încât $E(x,y)=a$.

D. Comănescu

3. Fie $ABCD$ un tetraedru cu următoarele proprietăţi:

i) dreptele AD, BD şi CD sunt perpendiculare două câte două;

ii) unghiurile făcute de dreptele AD, BD şi CD cu planul ABC au măsurile de 45º, 30º respectiv 30º.

Să se determine suma măsurilor tuturor unghiurilor diedre dintre feţele tetraedrului.

Prelucrare D. Comănescu

4. Fie α şi β două plane paralele. În planul α este situat un patrulater convex. Să se determine punctul P din planul β cu proprietatea că suma distanţelor de la P la cele patru vârfuri ale patrulaterului este minimă.

Prelucrare D. Comănescu

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 2 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

BAREM clasa a V-a

1. a) Fiecare numar din al doilea şir este multiplu de 3……………………..1p
   2008 nu este multiplu de 3 $\Rightarrow$ 2008 nu apare in al doilea şir ………...1p

   b) Cel mai mic numar cu suma cifrelor 2007 este $\underbrace{99...9}_{223 cifre}$…………………..2p

   c) Nu de ex. $\underbrace{99...9}_{223 cifre}0, 99\ldots900, \ldots 99\ldots9 \bullet 10^k \ (k \in N)$
   au suma cirelor 2007……………………………………………………..2p

2. $35=1^2+3^2+5^2$ …………………………………………………………4p
   $35^{2007}=35(35^{1003})^2$ …………………………………………………………1p
   $35^{2007}=(35^{1003})^2+(3.35^{1003})^2+(5.35^{1003})^2$ ……………………………….2p

3. $2^{x+y+z}+2^{y+z+v}+2^{z+v+w}+2^{v+w+x}$ -par
   1089-impar
   $\Rightarrow$ cel putin unul dintre exponenti este 0………………………………..4p
   De ex. $x+z+y=0 \Rightarrow x=y=z=0$……………………………………………1p
   $\Rightarrow 2^v(1+2^{v+1})=2^{10}+2^6=2^6(1+2^4)$……………………………………..1p
   $\Rightarrow v=6, w=3 \Rightarrow x+y+z+v+w=9=3^2$ …………………………………………1p

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

BAREM clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie n-1, n, n+1 $n \in N \setminus \{0,1\}$

$\frac{m(\hat{A})}{n-1} = \frac{m(\hat{B})}{n} = \frac{m(\hat{C})}{n+1} = \frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})}{3n} = \frac{180^0}{3n} = \frac{60^0}{n}$ …………………..(2p)

$\frac{m(\hat{B})}{n} = \frac{60^0}{n} \Rightarrow m(\hat{B}) = 60^0$ ……………………………………………..(1p)

SUBIECTUL 2

Presupunem că există p,q prime astfel încât $4^{2007}+1=p+q$………………………...(1p)
Din $4^{2007}+1$ impar $\Rightarrow$ p=2 sau q=2 ……………………………………………(2p)
Presupunem p=2
Obţine $4^{2007}+1=2+q$, de unde $q=4^{2007}-1$…………………………………………...(2p)
Arată că $4^{2007}-1=q$ nu poate fi număr prim………………………………………(2p)

SUBIECTUL 3

Notăm α=m($x\hat{O}y$), β= m($y\hat{O}z$).
Astfel $2(\alpha+\beta)=360^0 \Rightarrow \alpha+\beta=180^0 \Rightarrow$ A-O-C coliniare, B-O-D coliniare… (3p)
Arată că $[AB] \equiv [CD]$…………………………………………………………(2p)
Arată că $\sphericalangle PCO \equiv \sphericalangle QAO$ ………………………………………………(1p)
Finalizare……………………………………………………………… (1p)

SUBIECTUL 4

Dă un exemplu (1+2+3+6=2*6)……………………………………………….(2p)
Observă că numărul de divizori ai unui pătrat perfect este impar………...(2p)
Dacă n este impar atunci toţi divizorii săi sunt impari şi astfel sumă impară de numere impare este numărul impar $\neq$ 2n. ……………………………..(1p)
Dacă n este par atunci $n=2^{2k}*N^2$ cu n impar $\Rightarrow$ divizorii impari ai lui n sunt divizorii lui N^2 a căror sumă este impară $\Rightarrow$ suma tuturor divizorilor ai lui n esteun număr impar $\neq$ 2n.
……………………………………………..(1p)

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

BAREM clasa a VII-a

1. Figura corecta …………………………………………………………………1p
   AB_1BB_2- dreptunghi (analog AC_1CC_2)…………………………………….2p
   $B_1B_2 \parallel BC$ ………………………………………………………………1p
   B_1B_2 aparţine dreptei suport a liniei mijlocii a $\triangleleft ABC$ (analog C_1C_2)…….2p
   Finalizare……………………………………………………………………1p

Obs. B_1, B_2, C_1, C_2, sunt respectiv picioarele perpendicularelor din A pe bisectoarele <B, respectiv <C.

2. $\triangleleft COB \sim \triangleleft DOA$ ………………………………………………………2p
   $\triangleleft DOC \sim \triangleleft AOB$ ……………………………………………………...2p
   $\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………………………1p
   m(<COB)=45^0 …………………………………………………………..1p
   m(<AOB)=135^0 ………………………………………………………...1p

3.Elementele selectate au aceiaşi cifră : 0 sau 5 …………………………….2p
  200 numere din M au ultima cifră 0…………………………………………..2p
  201 numere din M au ultima cifră 5…………………………………………..2p
  Finalizare……………………………………………………………………1p

4. $\Rightarrow$ x+$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} - y$ $\Rightarrow$ x+y= $\sqrt{y^2+1}$-$\sqrt{x^2+1}$..(1)…………………2p
   y+$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x$ $\Rightarrow$ x+y= $\sqrt{x^2+1}$-$\sqrt{y^2+1}$ …(2)..……………...2p

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$(x+y)= - (x+y) $\Rightarrow$ x+y=0…………………………………………1p

$\Leftarrow$ x= -y, prin înlocuire calculează valoarea expresiei
(x+$\sqrt{x^2+1}$)$(y+\sqrt{y^2+1})$ ……………………………………………………….2p
Finalizare………………………………………………………………………….1p

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

BAREM clasa a VIII-a

1.
Observă că 2007 este soluţie .... 1 p.
Presupunând că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{\sqrt{2}+\sqrt{2007}} \in \mathbf{Q}$, arată că $\sqrt{2007n} \in \mathbf{Q}$ .... 2 p.
Arată că $\sqrt{2 \cdot 2007} - \sqrt{2 \cdot n} \in \mathbf{Q}$ .... 2 p.
Se ajunge la contradicţie... 2 p.

2.
Arată că $E(x,y) \geq \frac{1}{2}$ .... 2 p.
Arată că $E(x,y) < \frac{3}{2}$ .... 2 p.
Pentru $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *gaseste* $x, y \geq 1$ astfel încât *E(x,y)=a* .... 3 p.

3.
Demonstrează că
$m \prec [(ABD),(ACD)] = m \prec [(ABD),(BDC)] = m \prec [(ACD),(BCD)] = 90^\circ$ .... 1 p.
Arată că $m \prec [(BCD),(ABC)] = 45^\circ$ .... 2 p.
Arată că $m \prec [(ABC),(ABD)] = m \prec [(ABC),(ACD)] = 60^\circ$............................. 3 p.
Calculează suma unghiurilor .... 1 p.

4.
Construcţia simetricelor vârfurilor patrulaterului *ABCD* faţă de β .... 3 p.
Utilizează inegalitatea triunghiului.. 2 p.
Finalizare .... 2 p.