Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu

Ediția a XXII – a , Deva , 28 – 30 Martie 2008

Clasa a V – a

Problema 1 :

Să se afle toate numerele $a, b \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a + b = 8$ şi $a^a + b^b \vdots 8$.

Radu Moleriu

Problema 2 :

Să se afle cifrele x, y, z cu proprietatea că : $\overline{yx} + \overline{zy} = 101$ şi $\overline{xy} - \overline{yz} = 11$.

Radu Moleriu

Problema 3 :

Să se arate că numerele :

$$a = 1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + 4^{2008} + 5^{2008} + 6^{2008} + 7^{2008} + 8^{2008} + 9^{2008} + 10^{2008}$$

şi

$$b = 1^{2008} + 2^{2008} + \ldots + 2007^{2008} + 2008^{2008}$$

nu sunt pătrate perfecte.

Radu Moleriu

Problema 4 :

Un fermier are 4 băieți. Primul băiat are cu 3 copii mai mult decât al doilea, al doilea are cu un copil mai puțin decât al treilea, iar mezinul are de două ori mai mulți copii decât cel de - al treilea.

a) Ştiind că numărul total al nepoților fermierului este un pătrat perfect mai mic decât 35, aflați numărul de copii al fiecărui băiat.

b) În fiecare an fermierul face cadou fiecarui nepot şi soției sale câte un iepuraş. Aflați câți iepuraşi are fermierul acum, ştiind că în fiecare an crescătoria sa se măreşte cu 7 iepuraşi, iar peste 6 ani nu va mai avea nici un iepuraş.

Lavinia Moleriu

NOTĂ: Timp de lucru : 2 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 Martie 2008
Clasa a VI-a

1. a) Să se scrie numărul $2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + ... + 2^{2007}$ sub forma $2^n - 2^m$, cu $n, m \in \mathbb{N}$.
b) Aflaţi cel mai mic număr de forma

$$| \pm 2^{10} \pm 2^{11} \pm 2^{12} \pm ... \pm 2^{2008}|.$$

Maria Miheţ

2. a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc relaţia

$$2008^n \leq 2009^n - 2009^{n-1}.$$

b) Comparaţi numerele $A = 1 + 2008 + 2008^2 + ... + 2008^{2008}$ şi $B = 2009^{2008}$.

Andrei Eckstein

3. Pe segmentul (AB) se consideră un punct P. De aceeaşi parte a dreptei AB se construiesc triunghiurile APC şi BPD astfel încât $[PA] \equiv [PC]$, $[PB] \equiv [PD]$ şi $m(\sphericalangle APC) = m(\sphericalangle BPD) = a < 90°$. Dreptele AD şi BC se intersectează în Q. Să se afle $m(\sphericalangle AQC)$ în funcţie de a.

Maria Miheţ

4. Aflaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua suma cifrelor numărului $n + 1$, unde n este un număr cu suma cifrelor 2008.

Andrei Eckstein

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 Martie 2008
Clasa a VII-a

1. Fie $M = \{1, 2, \ldots, 2007, 2008\}$ mulţimea tuturor numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008. Mulţimea M se modifică succesiv, înlocuind câteva elemente ale sale cu restul sumei lor la împărţirea prin 29. Dacă la un moment dat avem că $M = \{x, 2007\}$, să se determine x.

M.Chiş

2. Fie ΔABC un triunghi oarecare, iar $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ şi $P \in (AB)$ mijloacele laturilor sale. Dacă O_a, O_b, O_c sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ΔANP, ΔBMP, ΔCMN, să se arate că
a) dreptele AO_a, BO_b şi CO_c sunt concurente;
b) triunghiurile $\Delta O_aO_bO_c$ şi ΔABC sunt asemenea.

M.Chiş

3. Fie $a, b, c, d > 0$, $t = b + c + d$, $u = c + d + a$, $v = d + a + b$, $w = a + b + c$ şi

$$E = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}\,.$$

a) Determinaţi numere raţionale $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$a = \alpha t + \beta u + \gamma v + \delta w\,.$$

b) Exprimaţi E în funcţie de t, u, v, w.
c) Arătaţi că

$$E \geq \frac{4}{3}\,.$$

M.Chiş

4. Fie $A_1A_2 \ldots A_{24}$ un poligon regulat cu 24 de laturi, iar $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{A_1, A_2, \ldots, A_{24}\}$ două submulţimi ale mulţimii vârfurilor poligonului formate din câte 5 vârfuri. Arătaţi că există câte două puncte in cele două mulţimi $M, N \in \mathcal{A}$ şi $P, Q \in \mathcal{B}$ astfel încât $[MN] \equiv [PQ]$.

M.Chiş

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 martie 2008

CLASA A VIII-A

1. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ x_n este un număr natural care verifică:

$$n+1 < \sqrt{n(x_n+3)} < n+\frac{3}{2}.$$

a) Ce valori poate lua x_{2008}?
b) Ce valori poate lua suma $x_1 + x_2 + ... + x_{2008}$?

Dan Comănescu

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$[x^2\sqrt{2}] + [x\sqrt{3}] + [\sqrt{77}] = 2008.$$

Observaţie: $\sqrt{2} = 1,4142....$

Dan Comănescu

3. Pe un teren dreptunghiular de lungime L şi de lăţime l este situat un zid paralelipipedic de lungime l şi înălţime H poziţionat paralel cu lăţimea terenului. O furnică pleacă dintr-un colţ al terenului şi ajunge în colţul opus. Care este lungimea minimă a drumului pe care ar putea merge furnica?

Dan Comănescu

4. Pe o masă orizontală sunt aşezate 4 cutii tetraedrale identice. Feţele unei cutii sunt colorate diferit; fiecare cutie este aşezată pe o faţă de o altă culoare. Toate cutiile sunt umplute cu apă ce ocupă 7/8 din volumul cutiilor. Care este raportul dintre suprafaţa totală aflată în contact cu apa şi suprafaţa totală a cutiilor?

Dan Comănescu

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Problema 1:	**Punctaj**
$a + b = 8$ are soluțiile :	
$a = 1$, $b = 7$	1 punct
$a = 2$, $b = 6$	1 punct
$a = 3, b = 5$	1 punct
$a = 4$, $b = 4$	1 punct
$7^7 + 1$ se divide cu 8	1 punct
$6^6 + 2^2 = 4\left(2^4 \cdot 3^6 + 1\right)$ nu se divide cu 8	1 punct
$3^3 + 5^5$ se divide cu 8	1 punct
$4^4 + 4^4$ se divide cu 8	1 punct
Concluzie : $a = 1$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 5$; $a = 4$, $b = 4$	1 punct
Oficiu	1 punct

Problema 2:	
$\overline{xy} - \overline{yz} = 11 \Rightarrow 10(x - y) + y - z = 11$	1 punct
$x - y = 1$ *sau* $x - y = 2$	2 puncte
$x - y = 1 \Rightarrow y - z = 1 \Rightarrow x = y + 1$, $z = y - 1$	2 puncte
$\overline{yx} + \overline{zy} = 10y + x + 10z + y = 10y + y + 1 + 10y - 10 + y = 22y - 9 \Rightarrow y = 5$	2 puncte
Concluzie : $x = 6$, $y = 5$, $z = 4$	2 puncte
Oficiu	1 punct

Problema 3:	
a) $1^{2008} = 1$, $2^{2008} = ...6$, $3^{2008} = ...1$, $4^{2008} = ...6$, $5^{2008} = ...5$	0,3 puncte
$6^{2008} = ...6$, $7^{2008} = ...1$, $8^{2008} = ...6$, $9^{2008} = ...1$, $10^{2008} = ...0$	pentru fiecare
Concluzie : $a = ...3$	
Ultima cifra a unui pătrat perfect este : 1,4,5,6,9 Rezulta a nu este pătrat perfect	1 punct
b) 2008 = 200 10 + 8	1 punct
$1^{2008} + ... + 2000^{2008} = ...0$	2 puncte
$200(...3) = ...0$	1 punct
Concluzie : $b = 2$ b nu este patrat perfect	1 punct
Oficiu	1 punct

Problema 4:	
a) Pătratele perfecte mai mici decât 35 sunt: 1,4,9,16,25	1 punct
Justificare de ce 16 este numărul posibil	1 punct
Dacă x – este numărul de copii al celui de al 2 – lea băiat atunci avem ecuația:	
x+3+x+x+1+2(x+1)=16 Rezultă x=2	1 punct
Concluzie: Primul băiat are 5 copii Al doilea băiat are 2 copii Al treilea băiat are 3 copii Mezinul are 6 copii	2 puncte
b) anul VI) : x+7-16-1=0 rezulta x=10 anul V) : x+7-16-1=10 rezulta x=20 anul VI) : x+7-16-1=20 rezulta x=30 anul VI) : x+7-16-1=30 rezulta x=40 anul VI) : x+7-16-1=40 rezulta x=50 anul VI) : x+7-16-1=50 rezulta x=60	3 puncte
Concluzie : fermierul are acum 60 iepurasi	1 punct
Oficiu	1 punct

CONCURSUL TRAIAN LALESCU
Ediţia a XXII-a - 29 martie 2008
BAREM PENTRU CLASA a VI-a

1.
BAREM : Start 1p
a) $2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + ... + 2^{2007} = \left(1 + 2^1 + ... + 2^{2007}\right) - \left(1 + 2 + ...2^9\right) =$
$= \left(2^{2008} - 1\right) - \left(2^{10} - 1\right) = 2^{2008} - 2^{10}$..2p
b) $2^{10} \big| | \pm 2^{10} \pm 2^{11} \pm 2^{12} \pm ... \pm 2^{2008}|$...2p
Arată că $|\pm 2^{10} \pm 2^{11} \pm 2^{12} \pm ... \pm 2^{2008}| \neq 0$..2p
Deduce că $| \pm 2^{10} \pm 2^{11} \pm 2^{12} \pm ... \pm 2^{2008}| \geq 2^{10}$...1p
Găseşte valoarea minimă $2^{10} = -2^{10} - 2^{11} - 2^{12} - ... - 2^{2007} + 2^{2008}$....................2p

2.
BAREM : Start 1p
$2008^n \leq 2009^n - 2009^{n-1} \iff 2008^n \leq 2008 \cdot 2009^{n-1}$.................................2p
Concluzia punctului a)..1p
Scrie relaţiile de la a) pt $k = 1, 2, ..., 2009$ şi le adună 4p
Obţine concluzia punctului b)...2p

3.
BAREM : Start 1p
Arată că $\Delta CPB \equiv \Delta APD$ (L.U.L.)..3p
Deduce $m(\sphericalangle PAD) = m(\sphericalangle CPB) = u$ şi $m(\sphericalangle PDA) = m(\sphericalangle PBC) = v$..........1p
Din ΔABQ $m(\sphericalangle CQA) = 180° - m(\sphericalangle AQB) = u + v$..2p
Din ΔCBQ $a = m(\sphericalangle CPA) = 180° - m(\sphericalangle CPB) = u + v$.............................2p
Concluzia $m(\sphericalangle CQA) = a$...1p

4.
BAREM : Start 1p
Observă că dacă $uc(n) \neq 9$ atunci nu are transfer la calcularea lui $n + 1$
deci $s(n + 1) = s(n) + 1 = 2009$...1p
Observă că dacă n se termină în k cifre de 9 atunci
$s(n + 1) = s(n) - 9k + 1$..4p
(Observă că n se termină în 9 =1p, ideea de transfer multiplu încă 1p)
Deduce $s(n + 1) = 2009 - 9k$...1p
Găseţe valoarea minimă $s(n + 1) = 2$...3p

Problema 1

Start	1p
Arată că suma elementelor din M se modifică la fiecare pas cu un multiplu de 29	2p
Deduce că restul împărțirii sumei la 29 rămâne neschimbat	1p
Calculează suma elementelor din M si obține restul împărțirii la 29 ca fiind 28	2p
Arată că x este obținut prin înlocuirea anumitor numere, deci este mai mic ca 29	2p
Arată că restul împărțirii prin 29 a lui 2007 este 6	1p
Deduce că $x = 22$	1p

Problema 2

Start	1p
Fie $A_P \in (AP), A_N \in (AN), B_P \in (BP), B_M \in (BM),\ C_M \in (CM), C_N \in (CN)$ mijloace iar O centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Atunci $O_a A_P$ este linie mijlocie în $\triangle APO$ şi analoagele	3p
Deduce că O_a este mijlocul lui (AO) şi analoagele	2p
Obține $O \in AO_a \cap BO_b \cap CO_c$	1p
Arată că $[O_a O_b]$ este linie mijlocie în $\triangle OAB$ şi analoagele	2p
Deduce că $\triangle O_a O_b O_c \sim \triangle ABC$	1p

Problema 3

Start	1p
Arată că $u + v + w - 2t = 3a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$	3p
Obține relațiile analoage pentru b, c, d și arată că $E = \frac{1}{3}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{v}{t} + \frac{t}{v} + \frac{w}{t} + \frac{t}{w} + \frac{u}{t} + \frac{t}{u} + \frac{u}{w} + \frac{w}{u} + \frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right) - \frac{8}{3}$	3p
Folosind inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,\ x, y > 0$ obține $E \geq \frac{4}{3}$	3p

Problema 4

Start	1p
Consideră O centrul poligonului și observă că dacă $A = \{P_1, P_2, ..., P_5\},\ B = \{Q_1, Q_2, ..., Q_5\}$ atunci $m\left(\widehat{P_i O Q_j}\right) = k\frac{360^0}{24},\ k \in \{1, 2, .., 23\}$	4p
Folosind principiul cutiei există două perechi de indici $(i, j), (k, l),\ i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel încât $m\left(\widehat{P_i O Q_j}\right) = m\left(\widehat{P_k O Q_l}\right)$	3p
Deduce că $[P_i P_j] \equiv [Q_k Q_l]$	2p

Problema 1

Start	1p
Arată că $x_{2008} = 2008$	2p
Arată că pentru $n \geq 3,\ x_n = n$	3p
Arată că $x_1, x_2 \in \{2,3\}$ şi deduce că $x_1 + x_2 \in \{4,5,6\}$	1,5p
Calculează $x_3 + x_4 + ... + x_{2008}$	1,5p
Deduce mulțimea valorilor posibile ale sumei	1p

Problema 2

Start	1p
Calculează $\left[\sqrt{77}\right]$	1p
Deduce că o soluție verifică $x \leq 37$	1,5p
Arată că $x = 37$ este soluție	5p
Arată că numerele naturale mai mici decât 37 nu sunt soluții	1,5p

Problema 3

Start	1p
Desfăşoară figura în plan	3p
Distanța inițială este lungimea diagonalei dreptunghiului astfel obținut(Justificare)	4p
Calculează distanța	2p

Problema 4

Start	1p
Observă că suprafața liberă a apei este o porțiune dintr-un plan orizontal	1p
Tetraedrul gol şi cutia sunt asemenea	3p
Calculează suprafața în contact cu apa dintr-o cutie	25p
Calculează raportul cerut	2,5p