Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 Martie 2008
Clasa a IX-a

1. a) Să se arate că dacă $x, y \in (0, \infty)$ au produsul 1, atunci

$$4 + x^2 + y^2 \geq 3(x + y).$$

b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Să se arate că

$$8 + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 3(a + b)(c + d).$$

Andrei Eckstein

2. Fie $k \in \mathbb{R}$, fixat. Să se determine mulţimea valorilor expresiei $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$, unde a, b, c sunt numere reale nenule astfel încât $\dfrac{b+kc}{a} = \dfrac{c+ka}{b} = \dfrac{a+kb}{c}$.

Andrei Eckstein

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu H_A, H_B, H_C şi H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC, iar cu G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale acestor triunghiuri.
a) Demonstraţi că patrulaterele $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$ sunt inscriptibile.
b) Fie O_H şi O_G centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$. Arătaţi că punctele O, O_G şi O_H sunt coliniare.

Prelucrare Dorel Miheţ

4. Fie $n_0 \in \mathbb{N}$. Aflaţi numărul funcţiilor $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cu proprietăţile:
i) $f\big(f(n) + n\big) = f(n), \qquad (\forall n) \in \mathbb{N}$
ii) $f(n_0) = 1$.

Prelucrare Dorel Miheţ

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 martie 2008

CLASA A X-A

1. Se consideră ecuaţia: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = m^4$, cu necunoscutele $m, n \in \mathbf{N}^*$.
a) Să se afle trei soluţii ale ecuaţiei.
b) Să se arate că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

Prelucrare de Ioan Caşu

2. Pe laturile unui patrulater convex $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile isoscele asemenea ABM, BCN, CDP, respectiv DAQ, având toate ca bază laturile patrulaterului $ABCD$. Să se arate că dreptele MP şi NQ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt egale sau dacă cele patru triunghiuri isoscele sunt dreptunghice.

Ioan Caşu

3. Fie un alfabet constituit din trei simboluri a, b, c. Să se arate că numărul de cuvinte de lungime n care se pot scrie cu acest alfabet astfel încât simbolul a are un număr par (nenul) de apariţii este:

$$\frac{3^n + 1}{2} - 2^n.$$

***

4. Fie A mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $f(x) = x^2 + px + q$ cu p, q numere naturale şi $1 \leq p, q \leq 2008$. Notăm cu B şi C submulţimile lui A formate din funcţiile pentru care ecuaţia $f(x) = 0$ are ambele soluţii întregi şi respectiv din funcţiile pentru care ecuaţia $f(x) = 0$ nu are soluţii reale. Care dintre mulţimile B şi C are mai multe elemente? Justificaţi răspunsul.

***

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 Martie 2008
Clasa a XI-a

1. Verificaţi că ecuaţia $7^x + 1 = 9^x$ are o unică soluţie reală şi precizaţi un interval de lungime maximă $\frac{1}{2}$ care conţine această soluţie.

$(\star\star\star)$

2. Fie $a_0, a_1, a_2, \cdots$ un şir de numere reale astfel că

$$a_0 = 1 \text{ şi } a_n = a_{\lfloor \frac{7n}{9} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{9} \rfloor}$$

pentru $n = 1, 2, \cdots$. Arătaţi că
(i) Există $M, p \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_n \leq M \cdot n^p, \ \forall n \geq 1$
(ii) Există un număr natural q cu $a_q < \frac{q}{2008!}$.
(Precizăm că $\lfloor x \rfloor$ este partea întreagă a lui $x : \mathbb{Z} \ni \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.)

$(\star\star\star)$

3. Pentru fiecare $n \geq 2$, se consideră matricea $A_n \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 4 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 5 & ... & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & n+1 \end{pmatrix},$$

şi se noteaz ă cu D_n determinantul acesteia. Studiaţi mărginirea şirului $\{\frac{D_n}{n!}\}$ şi convergenţa şirului $\{\frac{D_n}{(n+1)!}\}$.

$(\star\star\star)$

4. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care

$$x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2} x_n + \frac{n + n^2}{2^n} \quad , \forall n \geq 0\,.$$

Raluca Mureşan, Claudia Zaharia

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
Ediția a XXII – a , Deva , 28 – 30 Martie 2008
Clasa a XII – a

Problema 1:

i. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi $a,b\in A$.

Arătați că $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

ii. Presupunem că inelul A este ordonat, adică este dotat cu o relație de ordine $(\leq)$ în raport cu care oricare două elemente din A sunt comparabile şi avem îndeplinite condițiile :

$$a,b,c\in A,\ \ a\leq b\ \Rightarrow\ a+c\leq b+c$$
$$a,b,c\in A,\ \ a\leq b,\ 0\leq c\ \Rightarrow\ a\cdot c\leq b\cdot c$$

Arătați că $0\leq x^2$ pentru orice $x\in A$.

iii. Arătați că $\mathbf{Z}_n$ nu este inel ordonat pentru $n\geq 2$.

***

Problema 2:

Fie **S** – mulțimea tuturor şirurilor de numere reale. Cu M_0 notăm submulțimea lui **S** formată din şirurile convergente la 0. Pe **S** definim operația :

$$(x_n)*(y_n):=(x_0y_n+x_1y_{n-1}+...+x_ny_0).$$

i. Arătați că : $\left(\frac{1}{n!}\right)*\left(\frac{1}{n!}\right)\in M_0$.

ii. Verificați dacă M_0 este parte stabilă a lui **S** în raport cu operația $*$.

***

Problema 3 :

Fie $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcție continuă şi crescătoare. Arătați că :

$$f(0)\int_0^1 f(x)\,dx\leq\int_0^1 f^2(x)\,dx\ .$$

Constantin Buşe

Problema 4 :

Fie $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ două funcții continue cu proprietățile:

1. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\infty$.
2. g este crescătoare .
3. Există $M>0$ astfel încât :

$$\int_0^t f(x)g(x)\,dx\leq Mt\ \ \text{pentru orice}\ \ t\geq 0\ .$$

Arătați că $g\equiv 0$.

Constantin Buşe

NOTĂ: Timp de lucru : 3 ore.

CONCURSUL TRAIAN LALESCU
Ediţia a XXII-a - 29 martie 2008
BAREM PENTRU CLASA a IX-a

1.
BAREM : Start 1p
Notează $x+y=s$ şi exprimă în funţie de s şi $p=1$..1p
Arată că $s \geq 2$...1p
Obţine $(s-1)(s-2) \geq 0$ şi concluzia punctului a)...1p
Scrie inegalitatea de la a) pentru $x=ac$ şi $y=bd$ 2p
Scrie inegalitatea de la a) pentru $x=ad$ şi $y=bc$ 2p
Adună cele două relaţii şi obţine concluzia punctului b)..................................2p

2.
BAREM : Start 1p
Foloseşte proporţii derivate şi găseşte $b+kc=(k+1)a$ şi analoagele
DACĂ $a+b+c \neq 0$..2p
(un singur punct dacă lipseşte condiţia $a+b+c \neq 0$)
Rezolvă sistemul de mai sus şi deduce $a=b=c$..2p
Găseşte valoarea 27..1p
Găseşte şi valoarea 0...1p
Verifică dacă valoarea 0 este atinsă sau nu
(discută cazul $k=1$, este atinsă; $k \neq 1$ nu e atinsă)..2p
Concluzia : dacă $k=1$ mulţimea valorilor este $\{0,27\}$, dacă $k \neq 1$ atunci mulţimea valorilor este $\{27\}$...1p

3.
BAREM : Start 1p
Aplică teorema lui Sylvester pentru cele 4 triunghiuri......................................1p
Observă că $\overrightarrow{OH_A}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH_B}+\overrightarrow{OB}= ... =_{not} \overrightarrow{OP}$...1p
Deduce $PH_A = PH_B = PH_C = PH_D = R$. 1p
Arată că $G_AG_BG_CG_D$ este inscriptibil 3p
Coliniaritatea 3p

4.
BAREM : Start 1p
Înlocuieşte pe rând $n=n_0$, n_0+1, ... în relaţia din enunţ.................................1p
Demonstrează prin inducţie că $f(n)=1, \quad \forall n \geq n_0$..2p
Arată că $f(n) \in \{0,1\}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$..2p
Deduce că singurele funcţii posibil bune sunt de forma $f_k(n)=1$ pt $n \geq k$ şi 0 în rest (cu $k \in \{0,1,2,...,n_0\}$)..2p
Verifică faptul că toate aceste funcţii convin..1p
Deduce că exisă n_0+1 funcţii cu proprietăţile din enunţ...................................1p

Problema 1

Start	1p
Reduce ecuația la $n(n+1)=2m^2$ şi apoi $(2n+1)^2-8m^2=1$	2p
Găseşte soluții pe ideea $\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)^k = x_k \pm y_k\sqrt{2}$ etc	2p
Arată că x_k este impar şi $x_{k+1} > x_k$, $y_{k+1} > y_k$	2p
Determină trei soluții particulare perechi (m,n) adică $(1,1)$, $(6,8)$, $(35,49)$	3p

Problema 2

Start	1p
Afirmă că abordează problema cu ajutorul numerelor complexe	1p
Determină afixele punctelor M, N, P, Q în funcție de afixele punctelor A, B, C, D	2p
Pune condiția de perpendicularitate $\dfrac{z_M - z_P}{z_N - z_Q} \in i\mathbb{R}^*$	2p
Scrie echivalent cu $w+\overline{w}=0$ şi face calculele	2p
Finalizare	2p

Problema 3

Start	1p
Dacă aparițiile lui a sunt în număr de $2k$ atunci sunt C_n^{2k} poziții	1p
Celelalte poziții pot fi ocupate în 2^{n-2k} moduri	2p
Numărul de cuvinte este $\sum\limits_{k\geq 1} C_n^{2k} 2^{n-2k}$	2p
Observă că $(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum\limits_{k\geq 0} C_n^{2k} x^{2k}$	2p
Obține răspunsul $\dfrac{3^n+1}{2} - 2^n$	2p

Problema 4

Start	1p
Observă că mulțimile A, B, C sunt finite	1p
Consideră un element x^2+ax+b din B cu $m \leq n$ rădăcini întregi	1p
Din $m+n=-a,\ mn=b \Rightarrow -2008 \leq m,n \leq 0$	1p
Observă că $x^2-nx+mn \in A$	1p
Observă că $x^2-nx+mn \in C$	2p
Observă că această corespondență între un element din B şi unul din C este injectivă	1p
Dă exemplu de element al lui C care nu se obține astfel dintr-un element din B	1p
Deduce că numărul de elemente din C este strict mai mare decât cel din B	1p

Problema 1

Start 1p

Împarte cu $9^{\mathbf{x}}$ şi găseşte ecuaţia echivalentă $\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{9}\right)^x=1$ 2p

Precizează că funcţia $x\to f(x)=\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{9}\right)^x$ este strict descrescătoare şi continuă 3p

Ecuaţia are soluţie unică 1p

Rădăcina se află în intervalul $(0,1)$ 2p

Soluţia se găseşte în intervalul $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 1p

Problema 2

Start 1p

(i) demonstraţie prin inducţie : verificare pentru $p(1): M\geq 2,\ p\in\mathbb{R}$ 1p

$a_n\leq Mn^p\left[\left(\frac{7}{9}\right)^p+\left(\frac{1}{9}\right)^p\right]$ 2p

p este rădăcina ecuaţiei de la problema 1 2p

Concluzia inducţiei : $p(1),p(2),...,p(n-1)\Rightarrow p(n)$ 2p

(ii) $\frac{a_n}{n}\leq M\frac{1}{n^{1-p}}$ 1p

$\frac{1}{n^{1-p}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 1p

$\frac{a_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow\exists q\in\mathbb{N}^*\ \frac{a_q}{q}<\frac{1}{2008!}$ 1p

Problema 3

Start 1p

Găsirea relaţiei de recurenţă $D_n=nD_{n-1}+(n-1)!,\quad D_2=3$ 4p

$\frac{D_n}{n!}=\frac{D_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}$ 1p

$\frac{D_n}{n!}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\ \Rightarrow\left\{\frac{D_n}{n!}\right\}_n$ este nemărginit superior 2p

$\frac{D_n}{(n+1)!}=\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n+1}$. Aplică teorema Stolz-Cesaro $\Rightarrow\frac{D_n}{(n+1)!}\to 0$ 2p

Problema 4

Start 1p

Fie şirul $y_n=x_n2^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 3p

Relaţia de recurenţă pentru y_n : $y_{n+1}=y_n+2\left(n+n^2\right)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 2p

$|y_{n+1}|$ se majorează cu un polinom $P(n)$ de gradul 3 3p

$|x_n|=\frac{|y_n|}{2^n}\leq\frac{P(n)}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 1p

Problema 1

(i)Arată că $a(-b)=-(ab)$ 1p

Atunci $(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[-(ab)]=ab$ 1p

(ii) Dacă $x\geq 0\Rightarrow x\cdot x\geq x\cdot 0=0$ 1p

Dacă $x<0\Rightarrow 0=-x+x<-x\Rightarrow x^2=(-x)(-x)\geq 0$ 1p

(ii) Presupunem prin absurd că $\mathbb{Z}_n$ este ordonat 1p

Atunci $\hat{0}\leq\hat{1}=(\hat{1})^2\leq\hat{1}+\hat{1}\leq.......\leq\widehat{(n-1)}$ 1p

Rezultă $\hat{1}\leq\hat{0}$ care combinat cu cu inegalitatea precedentă conduce la $\hat{1}=\hat{0}$ 1p

Problema 2

(i)Calculează $(x_n)=\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ 2p

Folosind criteriul raportului demonstrează că $(x_n)\in M_0$ 2p

(ii) Arată că M_0 nu este parte stabilă 3p

De exemplu $(y_n):=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)*\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq\frac{2(n+1)}{n}>2$

Problema 3

Fie $G(t)=\frac{\int_0^t f(x)dx}{\int_0^t f^2(x)dx}$, $t>0$ 1p

Arată că G este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $G'(t)=\frac{f(x)\left[\int_0^t f(x)(f(x)-f(t))dt\right]}{\left(\int_0^t f^2(x)dx\right)^2}$ 3p

Avem $G'(t)\leq 0\Rightarrow G(t)$ descrescătoare 1p

Deduce că $G(t)\leq G(0+0)=\frac{1}{f(0)}$, $\forall t>0$ 1p

În particular $G(1)\leq\frac{1}{f(0)}$ şi obține inegalitatea dorită 1p

Problema 4

Precizează că există $L=\lim\limits_{n\to\infty} g(x)$ 1p

Presupunem prin absurd că $L>0$ 1p

Scrie sub forma $\frac{\int_0^t f(x)g(x)dx}{t}\leq M$, $t>0$ 1p

Cu regula l’Hospital avem $\infty=\lim\limits_{t\to\infty}|f(t)g(t)|\leq M$, care este contradicție 3p

Rămâne $L=0$ şi cum g este crescătoare rezultă $g\equiv 0$. 1p