Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a V-a

1. Un hârciog cară seminţe într-o galerie. La primul drum duce cu el o sămânţă, la al doilea duce 3 seminţe, la al treilea duce 5 seminţe, etc, în final la al 55-lea drum duce 109 seminţe. Într-o cămară, hârciogul poate depozita cel mult 1000 seminţe. El începe sa pună seminţe într-o cămară nouă doar după ce a umplut-o complet pe cea precedentă.

a) De câte cămări are nevoie hârciogul pentru a depozita toate seminţele?

b) După al câtelea drum a umplut complet a doua cămară?

Raluca Mureşan, Claudia Zaharia

2. Determinaţi cifrele a, b, c astfel încât $\overline{a(a+b)(a+b+c)c} \vdots 185$ ($a \neq 0$, iar $a+b$ şi $a+b+c$ sunt cifre).

Raluca Mureşan

3. La un spectacol, magicianul îi cere unei persoane din public să se gândească la un număr de trei cifre, $\overline{abc}$, unde a, b, c sunt cifre în baza 10. Apoi, magicianul îi cere persoanei respective să formeze numerele $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ şi $\overline{cba}$, să adune aceste cinci numere şi să îi spună suma lor, N. Cunoscând valoarea lui N, magicianul poate găsi numărul iniţial, $\overline{abc}$. Jucaţi rolul magicianului şi găsiţi $\overline{abc}$ dacă $N = 3194$.

(* * *)

Notă: Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale a şi b cu proprietatea că

$$[a, b]^2 - 800 \cdot (a, b)^2 = 2009.$$

(*Andrei Eckstein*)

2. Să se arate că dacă a, b şi c sunt numere cu proprietatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

atunci

$$\frac{a(a+1)}{b+c} + \frac{b(b+1)}{c+a} + \frac{c(c+1)}{a+b} = 1.$$

(*R M T*)

3. Un şir de numere naturale este construit după cum urmează: se porneşte cu a_1, din care se construieşte a_2 astfel: se lasă la o parte cifra unităţilor, apoi se adaugă la numărul astfel obţinut cifra unităţilor înmulţită cu 5 (de exemplu $748 \to 74 + 8 \cdot 5 = 114$). Arătaţi că dacă 2009 apare printre termenii acestui şir, atunci şirul nu conţine numere prime.

(*prelucrare Mihai Chiş*)

4. Fie BB_1 şi CC_1 bisectoarele unghiurilor B şi C ale unui triunghi ABC cu $BC = a$. Simetricul P al lui B faţă de B_1 şi simetricul Q al lui C faţă de C_1 sunt situate pe dreapta MN, unde M este mijlocul lui $[AB]$, N este mijlocul lui $[AC]$, $MN = \frac{a}{2}$ şi $MN || BC$.

Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC în funcţie de a.

(* * *)

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul interjudeţean de matematică Traian Lalescu

Ediţia a 23-a, Arad, 27-29.III.2009

clasa a VII-a

1. Determinaţi suma primelor $28+23-7$ zecimale ale numărului $\left((28+24-7-\sqrt{2009})^3\right)^{24}$.

2. Fie ΔABC un triunghi oarecare, $D \in (BC)$ şi $E \in BC \setminus (BC)$ două puncte astfel încât

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE},$$

iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ punctele în care paralela prin D la AE intersectează dreptele AB, respectiv AC. Arătaţi că D este mijlocul segmentului (MN).

3. Fie $a, b, c, u, v > 0$ numere pozitive, cu $u + v \geq 2$. Arătaţi că
a)

$$a(a+bu+cv) + b(b+cu+av) + c(c+au+bv) \leq \frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2 .$$

b)

$$\left(\frac{a}{a+bu+cv} + \frac{b}{b+cu+av} + \frac{c}{c+au+bv}\right) \cdot (a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)) \geq (a+b+c)^2 .$$

c)

$$\frac{a}{a+bu+cv} + \frac{b}{b+cu+av} + \frac{c}{c+au+bv} \geq \frac{3}{1+u+v} .$$

4. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi ascuţitunghic, cu centrul de greutate G, ortocentrul H şi centrul cercului circumscris O. Dacă A' este simetricul punctului A faţă de punctul O(i.e., $A' \in AO \setminus (OA$, cu $[A'O] \equiv [AO]$), arătaţi că
a) triunghiurile $\Delta\, AA'B$ şi $\Delta\, AA'C$ sunt dreptunghice.
b) patrulaterul $A'BHC$ este un paralelogram.
c) punctele O, G şi H sunt coliniare şi $OH = 3 \cdot OG$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore
Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş şi asist.dr. Radu Moleriu

Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea
$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2.$$

   b) Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ cu $abc=1$, atunci
$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

2. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$
$$\{x\} > \left\{x+\frac{1}{2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \{x\}^2 > \{2x\}.$$

3. Un recipient are formă de paralelipiped dreptunghic cu aria totală A. În recipient se află un volum V de apă. Fie h_1, h_2, h_3 înălțimile pe care le atinge apa atunci când recipientul este așezat succesiv pe trei fețe ale recipientului care au un vârf comun. Demonstrați că
$$h_1 + h_2 + h_3 \geq \frac{18V}{A}.$$

4. Fie ABC un triunghi echilateral cu ortocentrul H şi M, N două puncte variabile pe laturile (AB), respectiv (AC) astfel încât perimetrul triunghiului AMN este egal cu lungimea laturii (BC). Arătați că distanța de la H la MN este constantă.

Subiect propus de Andrei Eckstein şi Ioan Caşu

NOTĂ. Timp de lucru - trei ore.

Concursul interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a V-a
BAREM DE CORECTARE

Subiectul 1
• Observarea regulii ”la al k-lea drum, hârciogul duce $2k-1$ seminţe”...............1p
• Calculul sumei $1+3+5+...+109 = 2\cdot 1-1+2\cdot 2-1+...+2\cdot 55-1 = 2(1+2+...+55)-55 = 55^2 = 3025$...............3p
• Determinarea numărului de cămări necesare...............1p
• Se găseşte că în primele k drumuri duce k^2 seminţe...............1p
• Observarea faptului că numărul de drumuri după care se umple a doua cămară este cel mai mic pătrat perfect ≥ 2000...............2p
• Finalizare...............1p
• Oficiu...............1p

Subiectul 2
• Numărul este divizibil cu 5 $\Leftrightarrow c \in \{0,5\}$...............1p
• Cazul $c=0$ - trebuie ca $\overline{a(a+b)(a+b)0} \vdots 37$...............1p
- scrierea lui $\overline{a(a+b)(a+b)0}$ in baza 10...............1p
- $1110a+110b \vdots 37 \Leftrightarrow b \vdots 37 \Leftrightarrow b=0$...............1,5p
- a poate fi orice cifră nenulă...............0,5p
• Cazul $c=5$ - trebuie ca $\overline{a(a+b)(a+b+5)5} \vdots 37$...............1p
- scrierea lui $\overline{a(a+b)(a+b+5)5}$ în baza 10...............1p
$37|(1110a+110b+55) \Leftrightarrow 37|(18-b)$ - imposibil pentru b cifră...............2p
• Oficiu...............1p

Subiectul 3
• $N+\overline{abc} = 222(a+b+c)$...............3p
• Căutarea lui $a+b+c$ astfel încât $3194 < 222(a+b+c) < 3194+1000$...............3p
• $a+b+c \in \{15,16,17,18\}$...............1p
• Verificarea celor 4 posibilităţi, singura variantă convenabilă fiind $\overline{abc} = 358$...............2p
• Oficiu...............1p

Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a VI-a
BAREM DE CORECTARE

Subiectul 1
• Scrierea $a = d \cdot k_1$, $b = d \cdot k_2$ cu $(k_1, k_2) = 1$...............2p
• Înlocuirea în relaţia din enunţ $\Rightarrow d^2(k_1^2k_2^2 - 800) = 2009$...............2p
• $2009 = 7^2 \cdot 41$...............1p
• d poate fi 1 sau 7...............2p
• Cazul 1: $d = 1 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 53 \Rightarrow a, b$...............1p
• Cazul 2: $d = 7 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 29 \Rightarrow a, b$...............1p
• Oficiu...............1p

Subiectul 2
• $(a+b+c)\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{b+a}\right) = a+b+c$...............4p
• $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{b+a} = 0$...............3p
• Se adună relaţia anterioară cu cea din enunţ şi se obţine concluzia...............2p
• Oficiu...............1p

Subiectul 3
• Se presupune că 2009 este termen al şirului. Se observă că: $2009 \rightarrow 200 + 9 \cdot 5 = 245 \rightarrow 24 + 5 \cdot 5 = 49 \rightarrow 4 + 9 \cdot 5 = 49$, etc...............2p
• Toti termenii sirului de la un moment dat vor fi egali cu 49...............1p
• 2009 este multiplu de 49...............1p
• Se demonstrează că dacă un termen al şirului este multiplu de 49, si cel de dinaintea sa va avea aceasta proprietate: $\overline{abcd} + 5e \,\vdots\, 49 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} + 50 \cdot e \,\vdots\, 49 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} + e \,\vdots\, 49 \Leftrightarrow \overline{abcde} \,\vdots\, 49$...............5p
• Oficiu...............1p

Subiectul 4
• Figura corectă...............1p
• $\triangle B_1BC \equiv \triangle B_1PN$ $(U.L.U.)$...............1,5p
• $NP = BC = a$...............0,5p
• $\triangle C_1BC \equiv \triangle C_1MQ$ $(U.L.U.)$...............1,5p

- $MQ = BC = a$...............0,5p
- $\triangle MBP$ - isoscel $\Rightarrow MB = MP = \frac{3a}{2}$...............1,5p
- $AB = 3a$...............0,5p
- Analog $AC = 3a$...............1p
- Perimetrul triunghiului $ABC = 7a$...............1p
- Oficiu...............1p

Barem de corectare la clasa a VII-a

1.

start	1p
scrie sub forma $(45-\sqrt{2009})^{72}$	1p
observă că $44<\sqrt{2009}<45$	1p
arată că $45-\sqrt{2009}=\frac{16}{45+\sqrt{2009}}<\frac{16}{89}<\frac{1}{5}$	3p
arată că $\left(\frac{1}{5}\right)^{72}=\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{24}<\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\right)^{24}=\left(\frac{1}{10}\right)^{48}$	2p
deduce că primele 48(deci şi primele 44) de zecimale ale numărului dat sunt nule	2p
Total	**10p**

2.

start	1p
rescrie relaţia din enunţ sub forma $\frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CE}$ (1)	1p
din $MD \parallel AE$ deduce că $\Delta\, BMD \sim \Delta\, BAE$	1,5p
şi obţine că $\frac{MD}{AE}=\frac{BD}{BE}$ (2)	1p
din $DN \parallel AE$ deduce că $\Delta\, CDN \sim \Delta\, CEA$	1,5p
şi obţine că $\frac{ND}{AE}=\frac{CD}{CE}$ (3)	1p
din (1), (2) şi (3) deduce că $\frac{MD}{AE}=\frac{ND}{AE}$	2p
şi D este mijlocul segmentului (MN)	1p
Total	**10p**

3.

start	1p
a) arată că $a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)=$ $=\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2-\frac{u+v-2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$	2p
şi obţine inegalitatea	1p
b) aplică inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz şi obţine inegalitatea cerută	3p
c) din inegalităţile de la a) şi b) obţine $\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2\left(\frac{a}{a+bu+cv}+\frac{b}{b+cu+av}+\frac{c}{c+au+bv}\right)\geq(a+b+c)^2$	2p
şi deduce concluzia	1p
Total	**10p**

4.

start	1p
a) Din $[A'O]\equiv[AO]\equiv[BO]$ obţine că $m(\widehat{ABA'})=m(\widehat{BAA'})+m(\widehat{BA'A})=90^\circ$	1p
şi triunghiul $\Delta\, BAA'$ este dreptunghic	1p
analog, $\Delta\, CAA'$ este dreptunghic	1p
b) Din $BH\perp AC\perp A'C$ obţine că $BH \parallel A'C$	1p
analog, $CH\perp AB\perp A'B$ implică $CH\parallel A'B$	0,5p
şi $A'BHC$ este paralelogram	0,5p
c) Pentru $M\in BC\cap A'H$ avem că $[BM]\equiv[CM]$ şi $[HM]\equiv[A'M]$	1p
atunci $G\in(AM)$ cu $GM=\frac{1}{3}AM$,	1p
iar dacă G' este centrul de greutate al triunghiului $\Delta\, AHA'$, atunci $G'\in(AM)$ cu $G'M=\frac{1}{3}AM$	1p
deduce că $G=G'$ şi $G\in(HO)$, cu $OH=3\cdot OG$	1p
Total	**10p**

Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009

Barem – Clasa a VIII-a

Problema 1
Start ... 1p
Demonstrează inegalitatea de la a) ... 2p
Aplică inegalitatea de la punctul a) succesiv pentru $x=a^2, y=b^2; x=b^2, y=c^2; x=c^2, y=a^2$ şi prin înmulțire apoi extragere de radicali obține inegalitatea $(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)$ ... 4p
Aplică inegalitatea de la punctul a) succesiv pentru $x=ab, y=bc; x=bc, y=ca; x=ca, y=ab$ şi prin înmulțire apoi extragere de radicali obține inegalitatea $(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2) \geq |(1+ab^2c)(1+abc^2)(1+a^2bc)|$ ... 2p
Aplică ipoteza abc=1 şi finalizează ... 1p

Problema 2
Start ... 1p
Observă că $\left\{x+\frac{1}{2}\right\} < \{x\} \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ ... 2p
Pentru implicația directă: observă că $\{2x\} = 2\{x\} - 1$ ... 2p
Arată că $2\{x\} - 1 \leq \{x\}^2$ ... 1p
Justifică de ce nu poate avea loc egalitate mai sus ... 1p
Pentru implicația inversă: consideră x cu $\{x\} < \frac{1}{2}$ ... 1p
Observă că $\{2x\} = 2\{x\}$ ... 1p
Demonstrează că $2\{x\} \geq \{x\}^2$ ... 1p

Problema 3
Start ... 1p
Dacă se notează cu S_1, S_2, S_3 ariile fețelor pe care este aşezat recipientul, scrie că $A = 2(S_1 + S_2 + S_3)$ ... 1p
Scrie că $V = h_1S_1 = h_2S_2 = h_3S_3$ ... 2p
Scrie echivalent inegalitatea din concluzie ca $h_1 + h_2 + h_3 \geq \frac{9V}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{9}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}}$ ... 2p
Demonstrează inegalitatea obținută (cu inegalitatea mediilor, cu Cauchy-Buniakowski sau altfel) ... 4p

Problema 4
Start ... 1p
Observă că $AM+MN+NA=BC$ se scrie echivalent $(BC-BM)+MN+(BC-CN)=BC$ ... 2p
Rescrie sub forma $MN+BC=BM+CN$ ... 1p
Afirmă că egalitatea obținută implică faptul că *BMNC* este patrulater circumscriptibil ... 2p
Observă că cercul înscris în *BMNC* este cercul înscris în triunghiul ABC ... 2p
Observă că distanța de la *H* la *MN* este egală cu raza cercului înscris în triunghiul *ABC* (şi patrulaterul *BMNC*), deci este constantă ... 2p