Universitatea de Vest din Timisoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Timişoara, 26-28 Martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

I. Fie A o mulţime nevidă de numere naturale şi $f : A \to A$ o funcţie diferită de funcţia identică pe A având proprietatea că

$$f(m) - f(n) = m - n, \qquad \text{pentru orice } m, n \in A.$$

- **a)** Arătaţi că A este infinită.
- **b)** Rămâne adevărat rezultatul de la **a)** în cazul funcţiei identice? Justificaţi răspunsul.

II. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, ecuaţia:

$$\frac{2x}{2-x} = \left[\frac{2x}{x^2 - x + 1}\right].$$

III. Fie ABC un triunghi şi $M \in (AB), N \in (BC), P \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA}.$$

- **a)** Demonstraţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.
- **b)** Demonstraţi că pentru orice punct S din plan, avem:

$$SM^2 + SN^2 + SP^2 \leq SA^2 + SB^2 + SC^2.$$

IV. Despre un număr natural nenul vom zice că este liber de pătrate dacă el nu se divide cu pătratul nici unui număr prim. Fie n un astfel de număr (adică liber de pătrate) şi A_n mulţimea tuturor numerelor $z := a + b\sqrt{n}$, unde a şi b sunt numere raţionale şi $a^2 - nb^2 = 1$. Arătaţi că:

- **a)** Numărul 2010 este liber de pătrate.
- **b)** Pentru $n \neq 2010$, mulţimea $A_n \cap A_{2010}$ este finită.
- **c)** Mulţimea A_{2010} este infinită.

Universitatea de Vest din Timişoara Timişoara, 26-28 martie 2010
Inspectoratul Şcolar Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Clasa a X-a

Enunţuri

1. Să se determine funcţiile surjective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care $f(m) + f(n) = f(f(m+n))$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ $(n \geq 2)$ cu $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 1$. Arătaţi că putem înlătura un număr astfel încât suma numerelor rămase să fie mai mică decât $\sqrt{2}$.

3. Fie $a, b \in (1, \infty)$. Se consideră ecuaţia

$$a^{8x^2+8y} + b^{8y^2+8x} = \frac{2}{a^{\log_b a} b^{\log_a b}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se rezolve ecuaţia în cazul $a = b$;
b) Să se studieze dacă ecuaţia are soluţii în cazul $a \neq b$.

4. Fie patrulaterul $ABCD$. Fie $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BC} = 1.$$

a) Să se arate că

$$MN \cdot BC \cdot AD \leq BN \cdot AC \cdot AD + AM \cdot BD \cdot BC.$$

b) Să se arate că mijloacele segmentelor $[AC]$, $[BD]$ şi $[MN]$ sunt coliniare.

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara — Timişoara, 26–28 Martie 2010
Inspectoratul Şcolar Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu“, Ediţia a XXIV-a

Enunţuri

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul de numere reale definit prin

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} x_n; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}.$$

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 2010$ şi

$$x_{n+1} = \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul (x_n) este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici inversabile astfel încât $A^{-1} + B^{-1} = I_n$. Să se arate că:

(i) $I_n = (I_n - A)(I_n - B)$;
(ii) $\det[I_n - A^3 - B^3 + (AB)^3] \geq 0$.

4. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lg 2 & \lg 3 & \lg 5 \\ \lg 2 & 1 & \lg 5 & \lg 3 \\ \lg 3 & \lg 5 & 1 & \lg 2 \\ \lg 5 & \lg 3 & \lg 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

unde $\lg x$ notează logaritmul în baza 10 al lui x. Să se arate că $\det A < 1$.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică

Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Enunţuri

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x \ln(1 + tgx tgt)dt$. Să se calculeze:

   (i) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

   (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x + \ln x$. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(t) = x$ are o soluţie unică $t = \varphi(x)$. Să se arate apoi că $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \to \varphi(x)$ este derivabilă şi să se calculeze

$$I = \int\limits_1^{1+e} \frac{dx}{1 + \varphi(x)}.$$

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y))$, pentru orice $x, y \in A$.

   (i) Să se demonstreze că $f(0) = 0$ şi $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in A$.

   (ii) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \leq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

4. (i) Fie G un grup finit şi A o submulţime a lui G astfel încât $card(A) > \frac{1}{2}card(G)$. Demonstraţi că pentru orice $g \in G$ există $a_1, a_2 \in A$ astfel încât $g = a_1 a_2$.

(ii) Fie K un corp finit. Demonstraţi că pentru orice $x \in K$, există $u, v \in K$ astfel încât $x = u^2 + v^2$.

Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică

Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV -a

Clasa a IX -a

BAREM

Problema 1.
Start ... 1p
a)
$f(m) - m = f(n) - n = k$, deci $f(n) = n + k,\ k \in \mathbb{N}$ ... 1p
$f \neq 1_A$, deci $k \neq 0$... 1p
Presupunem că A este finită şi notează
$a = \min(A)$ şi $b = \max(A)$ ... 2p
Calculează $f(a) = a + k \notin A$ când $k < 0$ şi ajunge la contradicţie şi
calculează $f(b) = b + k \notin A$ când $k > 0$ şi ajunge la contradicţie ... 1p
b) Pe orice mulţime finită se poate defini funcţia identică,
$1_A : A \to A$, $1_A(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$... 1p

Problema 2.
Start ... 1p
Determină $\mathrm{Im} f = \left[-\dfrac{3}{2}, 2\right]$, unde $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x + 1}$ ... 3p
Rezolvă ecuaţiile $\dfrac{2x}{2-x} = k,\ k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Face verificările necesare şi află soluţiile ... 3p

Problema 3.
Start ... 1p
$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BM}$ unde $k \in (0, 1)$ este raportul comun ... 1p
Obţine sau ştie $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{SA} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{SB}$ ... 1p

Se ştie că G este centrul de greutate dacă şi numai
dacă $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ şi
verifică relaţia $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=0$ ... 1p
$|\overrightarrow{SM}| \leq \frac{1}{1+k}|\overrightarrow{SA}|+\frac{k}{1+k}|\overrightarrow{SB}|$ (deoarece $k>0$) ... 1p
$|\overrightarrow{SM}|^2 \leq \frac{1}{(1+k)^2}|\overrightarrow{SA}|^2+\frac{k^2}{(1+k)^2}|\overrightarrow{SB}|^2+\frac{2k}{(1+k)^2}|\overrightarrow{SA}|\cdot|\overrightarrow{SB}|$... 1p
$\sum|\overrightarrow{SM}|^2 \leq S_2\left(\frac{1}{(1+k)^2}+\frac{2k}{(1+k)^2}+\frac{k^2}{(1+k)^2}\right)=S_2$ unde
$S_2=\sum|\overrightarrow{SA}|^2$... 1p

Problema 4.
Start ... 1p
a) $2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, (liber de pătrate) ... 1p
b) $-1,1\in A_n$
Dacă $a+b\sqrt{n}=c+d\sqrt{2010}$ atunci
$(a-c)^2=2010d^2+nb^2-2bd\sqrt{2010n}$ ... 1p
$\sqrt{2010n}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $b=d=0$ şi $A_n\cap A_{2010}=\{-1,1\}$ ... 1p
c) Arată că există $z_0\in(-1,1)\cap A_{2010}$ ... 1p
Prin inducţie arată că $z_0^m\in A_{2010}$, $\forall m\in\mathbb{N}$,
deci A_{2010} este finită ... 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Clasa a X-a

Barem

1. Start ... **1p**
Se ia $n = 0$ şi cu notaţia $f(0) = t$ obţine $f(m) + t = f(f(m)), \quad \forall m \in \mathbb{N}$ ... **1p**
Din surjectivitatea lui f deduce că pentru orice număr natural p există un număr natural k_p astfel încât $f(k_p) = p$ ... **1p**
Considerând $m = k_p$ în relaţia de mai sus obţine că $p + t = f(p)$ pentru orice p număr natural ... **2p**
Dacă $t \neq 0$ ajunge la o contradicţie cu surjectivitatea lui f ... **1p**
Obţine funcţia identică drept unică soluţie a problemei ... **1p**

2. Start ... **1p**
Consideră x_1 cel mai mare dintre numerele $x_1, x_2, ..., x_n$ ... **2p**
Obţine $(x_2 + ... + x_n)^2 = \sum\limits_{2 \leq i \leq n} x_i^2 + \sum\limits_{2 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j$ ... **1p**
Scrie $x_i^2 < 2x_1 x_i$ ... **0.5p**
Obţine că $(x_2 + ... + x_n)^2 < \sum\limits_{2 \leq i \leq n} 2x_1 x_i + \sum\limits_{2 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j = 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 2$ ... **2p**
Obţine concluzia ... **0.5p**

3. Start ... **1p**

a) $a^{8x^2+8y} + a^{8y^2+8x} \geq 2a^{4x^2+4y} \cdot a^{4y^2+4x} = 2a^{(2x+1)^2+(2y+1)^2-2} \geq 2a^{-2}$; obţine soluţia unică $x = y = -\frac{1}{2}$ ... **2p**

b) $a^{8x^2+8y} + b^{8y^2+8x} = e^{(8x^2+8y)\ln a} + e^{(8y^2+8x)\ln b} \geq$ ... **1p**
$\geq 2e^{(4x^2+4y)\ln a + (4y^2+4x)\ln b} =$

$$2e^{\left(2x\sqrt{\ln a} + \frac{\ln b}{\sqrt{\ln a}}\right)^2 + \left(2y\sqrt{\ln b} + \frac{\ln a}{\sqrt{\ln b}}\right)^2 - \frac{(\ln b)^2}{\ln a} - \frac{(\ln a)^2}{\ln b}}$$

$$\geq 2e^{-\frac{(\ln b)^2}{\ln a} - \frac{(\ln a)^2}{\ln b}} = \frac{2}{a^{\log_b a} b^{\log_a b}} \quad ... \quad \mathbf{1p}$$

Egalitatea are loc dacă $(8x^2 + 8y)\ln a = (8y^2 + 8x)\ln b$ şi $2x\sqrt{\ln a} + \frac{\ln b}{\sqrt{\ln a}} = 2y\sqrt{\ln b} + \frac{\ln a}{\sqrt{\ln b}} = 0$ ... **1p**

Se obţine $a = b$ în mod necesar (concluzia) ... **1p**

4. Start ... **1p**
Notează $\frac{AM}{AD} = \alpha$, $\frac{BN}{BC} = 1 - \alpha$ şi obţine $z_M = (1-\alpha)z_A + \alpha z_D$, $z_N = \alpha z_B + (1-\alpha)z_C$ ... **2p**
Deduce $|z_M - z_N| \leq (1-\alpha)|z_A - z_C| + \alpha|z_B - z_D|$ şi de aici că $MN \leq \frac{BN}{BC} \cdot AC + \frac{AM}{AD} \cdot BD$, care este echivalentă cu inegalitatea din enunţ ... **2p**
Scrie egalitatea $\frac{z_M + z_N}{2} = (1-\alpha)\frac{z_A + z_C}{2} + \alpha\frac{z_B + z_D}{2}$ şi obţine concluzia ... **2p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş Timişoara, 26–28 Martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu“, Ediţia a XXIV-a

Bareme – **Clasa a XI-a**

Problema 1

Start 1p

Prin inducţie $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n} > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi astfel (x_n) este şir strict crescător........ 1p

Prin reducere la absurd se arată că (x_n) este nemărginit superior, deci $x_n \to \infty$........ 1p

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{\sqrt{x_n}}{x_n}) = 1$ 1p

Din Lema Cesaro-Stoltz se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{2} =$
$= \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}+1} = \frac{1}{4}$........ 3p

Problema 2

Start 1p

Notăm $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ şi prin inducţie $S_n > n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ 1.5p

Atunci $0 < x_{n+1} = \frac{n}{S_n} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{n}{S_n} - \frac{n-1}{S_{n-1}} = \frac{nS_{n-1}-(n-1)S_n}{S_{n-1}S_n} == \frac{S_{n-1}-(n-1)x_n}{S_{n-1}S_n} = \frac{n-1}{S_{n-1}S_n}(\frac{S_{n-1}}{n-1} - x_n) =$
$= \frac{n-1}{S_{n-1}S_n} \cdot \frac{1-x_n^2}{x_n} > 0$ 1.5p

(x_n) este convergent şi notăm cu $\ell \in (0, 1]$ limita sa 1p

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{S_{n+1}-S_n} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ell}$, deci $\ell = 1$........ 1p

Problema 3

Start 1p

(i) Se înmulţeşte relaţia $A^{-1} + B^{-1} = I_n$ la stânga respectiv la dreapta cu A şi se obţine că $AB^{-1} = B^{-1}A$ 1.5p

Se înmulţeşte relaţia $A^{-1} + B^{-1} = I_n$ la dreapta cu AB şi se obţine $A + B = AB$ 1p

Rezultă că $I_n = (I_n - A)(I_n - B)$ 0.5p

(ii) Înmulţind relaţiile $I_n - A^3 = (I_n - A)(I_n + A + A^2)$ şi $I_n - B^3 = (I_n - B)(I_n + B + B^2)$ avem că $I_n - A^3 - B^3 + (AB)^3 = (I_n + A + A^2)(I_n + B + B^2)$ 1p

Pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\,(I_n + X + X^2) = \det[(X + \frac{1}{2}\, I_n)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\, I_n)^2] \geq 0$........ 1p

Rezultă că $\det[I_n - A^3 - B^3 + (AB)^3] \geq 0$ .... 1p.

Problema 4

Start 1p

Se calculează $\det A = \lg 300 \cdot\ \lg \frac{25}{3} \cdot\ \lg \frac{4}{3} \cdot\ \lg 3$ 4.5p

Din inegalitatea mediilor se obţine că $\sqrt[4]{\det A} < \dfrac{\lg 300 + \lg \frac{25}{3} + \lg \frac{4}{3} + \lg 3}{4} = 1$ 1.5p

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică

Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Barem de corectare

Clasa a XII-a

(1. i) Start 1p

(ii) Calculează $f(x)=\int\limits_0^x \ln\left(\frac{\cos(x-t)}{\cos x\cos t}\right)dt$ 1p

(iii) Observă că $f(x)=\int\limits_0^x \ln\cos(x-t)dt - x\ln\cos x - \int\limits_0^x \ln\cos t dt$ 1p

(iv) Face schimbarea de variabilă $x-t=s$ şi deduce $f(x)=-x\ln\cos x$ 2p

(v) Evaluează $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}\ln 2$ 1p

(vi) Calculează $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$....................................... 1p

(2.i) Start 1p

(ii) Arată că f este bijectivă 1p

(iii) Arată că funcţia φ este derivabilă 2p

(iv) Face schimbarea de variabilă $x=f(y)$ şi calculează $I=\int\limits_1^e \frac{f'(y)}{1+y}dy=$
$=1$. 3p

(3.i) Start 1p

(ii) $x=y=0$ conduce la $f(0)=0$; 1p
$y=-x$ conduce la $f(-x)=f(x)$ 1p

(iii) Din ipoteză deducem că cel puţin unul dintre $f(x+y)$ şi $f(x-y)$ este mai mic cu $f(x)+f(y)$ 2p

(iv) Rezultatul se extinde prin inducţie 2p

(4.i) Start 1p

(ii) Fixează $g \in G$ şi consideră $B = \{ga_2^{-1} : a_2 \in A\}$, probând $cardA = cardB$ 1p

(iii) Folosind ipoteza deduce că $A \cap B \neq \emptyset$ 2p

(iv) Consideră $C = \{x^2 : x \in K\}$ şi demonstrează că aceasta conţine câte un obiect din perechile $(x, -x)$, $x \in K^*$ şi pe 0, de unde deduce $cardC > \frac{1}{2}cardK$ 2p

(v) Stabileşte rezultatul final folosind punctele precedente 1p