**Universitatea de Vest din Timişoara** **Inspectoratul şcolar judeţean**
**Facultatea de Matematică şi Informatică** **Caraş-Severin**

# Concursul interjudeţean de matematică
# "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
# Reşiţa, 25-27 martie 2011

## Subiecte pentru clasa a IX-a

**1.** Fie $ABC$ un triunghi, $D$ mijlocul laturii $[BC]$ şi $E$ piciorul bisectoarei duse din $B$. Notăm cu $P$ intersecţia segmentelor $[AD]$ şi $[BE]$.
Demonstraţi că $P$ este simetricul lui $D$ faţă de centrul de greutate al triunghiului $ABC$ dacă şi numai dacă $BC = 4AB$.

**2.** Fie $a$ un număr real. Demonstraţi că dacă ecuaţia

$$2[x] - 3\{x\} = a$$

are două soluţii reale distincte, atunci diferenţa dintre acestea este 5/3.

**3.** Se defineşte şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel:

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = 2x_n - \sqrt{3x_n^2 + 25} \qquad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Demonstraţi că:
a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător.
b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc relaţia

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n .$$

c) Toţi termenii şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sunt numere întregi divizibile cu 5.
d) $x_n$ este par dacă şi numai dacă $n$ este par.

**4.** Demonstraţi că pentru orice $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x} .$$

**Notă:** Timp de lucru - 3 ore

# Clasa a IX-a

## Soluţii

1. Notăm cu $x$ valoarea raportului AB/BC=AE/EC (teorema bisectoarei, 1 punct) şi cu $y$ valoarea raportului AP/PD. Trebuie să demonstrăm că $x = 1/4 \Leftrightarrow y = 1/2$ (2 puncte).

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}}{1+x} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{BA} + \frac{x}{1+x}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$
$$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}}{1+y} = \frac{1}{1+y}\overrightarrow{BA} + \frac{y}{2(1+y)}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$

   Cum vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{BP}$ sunt colineari, rezultă

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+y}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{y}{2(1+y)}} \text{(2 puncte)}$$

   adică $y = 2x$ (1 punct). Rezultă echivalenţa cerută (1 punct).

2. Fie $x_1,\ x_2$ două soluţii distincte ale ecuaţiei. Putem presupune că $x_1 < x_2$, de unde rezultă $[x_1] \leq [x_2]$ (1 punct). Dacă $[x_1] = [x_2]$, din $2[x_1] - 3\{x_1\} = a = 2[x_2] - 3\{x_2\}$ rezultă $\{x_1\} = \{x_2\}$ şi deci $x_1 = x_2$, absurd. Astfel, $[x_1] < [x_2]$ (2 puncte). Se obţin relaţiile

$$3 > 3(\{x_2\} - \{x_1\}) = 2([x_2] - [x_1]) \geq 2$$

   de unde rezultă $[x_2] - [x_1] = 1$ (2 puncte) şi $\{x_2\} - \{x_1\} = 2/3$ (2 puncte).
   În concluzie, $x_2 = [x_2] + \{x_2\} = [x_1] + 1 + \{x_1\} + 2/3 = x_1 + 5/3$ (2 puncte).

3. a) Din enunţ rezultă $x_{n+1} < 2x_n - \sqrt{3}|x_n| \leq (2-\sqrt{3})x_n < x_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ (2 puncte).
   b) Relaţia de recurenţa conduce la

$$x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Conform cu a), doar soluţia cu "+" convine (2 puncte). Adunând această egalitate cu

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25}$$

se obţine $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ (1 punct).
c) $x_0 = 0,\ x_1 = 5$ satisfac condiţiile. Din b) rezultă că dacă $x_n$ şi $x_{n+1}$ sunt întregi divizibili cu 5, atunci $x_{n+2}$ satisface aceleaşi condiţii. O inducţie "cu dublă ipoteză" încheie demonstraţia (2 puncte).
d) $x_0$ este par, iar $x_1$ impar. Din b) rezultă că $x_n$ şi $x_{n+2}$ au aceeaşi paritate. O inducţie "cu salt" încheie demonstraţia (2 puncte).

4. Putem presupune că $z$ este cel mai mic dintre cele 3 unghiuri. Atunci

$$(\sin y - \sin z)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos z}\right) \geq 0$$

de unde obţinem

$$\frac{\sin y}{\cos x} + \frac{\sin z}{\cos z} \geq \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x} \quad (*) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Utilizând monotonia funcţiilor trigonometrice în primul cadran, obţinem

$$(\sin x - \sin y)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos y}\right) \geq 0$$

ceea ce se mai scrie

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos x} \quad (**) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Adunând membru cu membru inegalităţile $(*)$ şi $(**)$ rezultă concluzia (3 puncte).

**Universitatea de Vest din Timişoara**
**Facultatea de Matematică şi Informatică**

**Inspectoratul Şcolar Judeţean**
**Caraş-Severin**

# Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

## Subiecte pentru clasa a X-a

**1.** Fie $A$ o mulţime de numere reale cu 2011 elemente. Determinaţi funcţiile injective $f : A \to A$ care au proprietatea că

$$|f(x) - x| = |f(y) - y|$$

pentru orice $x, y \in A$.

**2.** a) Arătaţi că funcţiile (”sinus hiperbolic” şi respectiv ”cosinus hiperbolic”)

$$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ sh(t) \overset{def}{=} \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \qquad ch : \mathbb{R} \to [1, \infty),\ ch(t) \overset{def}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

sunt surjective; arătaţi că funcţia $sh$ este bijectivă şi să se determine inversa acesteia.

b) Arătaţi că au loc următoarele egalităţi:

$$ch^2(t) - sh^2(t) = 1; \quad ch(t_1 + t_2) = ch(t_1)ch(t_2) + sh(t_1)sh(t_2);$$
$$sh(t_1 + t_2) = sh(t_1)ch(t_2) + ch(t_1)sh(t_2)$$

pentru orice $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

c) Arătaţi că dacă numerele reale $x, y, z$ verifică egalitatea

$$(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = z + \sqrt{1 + z^2},$$

atunci au loc egalităţile

$$x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} = z; \qquad xy + \sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + z^2};$$
$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 4x^2y^2z^2.$$

**3.** Fie $a, b, c$ numere complexe distincte astfel încât $|bc|a + |ca|b + |ab|c = 0$. Arătaţi că are loc inegalitatea $|(b + c)(c + a)(a + b)| \geq |abc|$.

**4.** a) Arătaţi că numărul $2010! + 1$ este divizibil cu 2011.

b) Arătaţi că o mulţime de 2010 numere naturale consecutive nu se poate descompune în două submulţimi nevide şi disjuncte $A$ şi $B$ astfel încât produsul numerelor din mulţimea $A$ să fie egal cu produsul numerelor din mulţimea $B$.

**Notă**. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

**Concursul Interjudeţean de Matematică**
**Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a**,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
**Clasa a X-a - Barem orientativ de corectare**

**Problema 1.** Start ... 1p
Afirma ca functia $f$ este si surjectiva (bijectiva) ... 2p
Obtine $f(x) = x \pm c$ pentru orice $x \in A$ ($c$ fixat) ... 2p
Scrie $\sum_{x\in A} f(x) = \sum_{x\in A} x + c \cdot \sum_{x\in A} \pm 1 = \sum_{x\in A} x$ ... 3p
Din imparitatea numarului de elemente ale lui $A$ deduce $c = 0$; concluzioneaza ca raspunsul la problema este functia identitate ... 2p
**Problema 2.** Start ... 1p
Demonstreaza surjectivitatea lui $sh$ si respectiv $ch$ ... 1p+1p=2p
Demonstreaza injectivitatea (bijectivitatea) lui $sh$ si obtine inversa ... 0.5p
Demonstreaza cele trei egalitati de la punctul b) ... 0.5p+0.5p+0.5p=1.5p
Logaritmeaza ipoteza din c) si scrie sub forma $sh^{-1}(x) + sh^{-1}(y) = sh^{-1}(z)$ ... 1p
Aplica egalitatii de mai sus functia $sh$ (si/sau $ch$) si obtine cele doua egalitati din concluzie ... 1p
Obtine egalitatile similare $-y\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+y^2} = x$, $-x\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2} = y$ ... 2p
Elimina $\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+y^2}, \sqrt{1+z^2}$ din egalitatile corespunzatoare si obtine a treia egalitate de la c) ... 1p
(Daca demonstreaza altfel/direct se acorda cele 5p)
**Problema 3.** Start ... 1p
Deduce ca punctele $A_1\left(\frac{1}{|a|} \cdot a\right), B_1\left(\frac{1}{|b|} \cdot b\right), C_1\left(\frac{1}{|c|} \cdot c\right)$ sunt pe cercul unitate si ca centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ este in originea $O$ ... 1p+1p=2p
Deduce ca triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral si de aici ca unghiurile $\angle A_1OB_1$ etc. au masurile egale cu $120°$ ... 1p+1p=2p
Aplica teorema cosinusului in triunghiurile $OBC$, $OCA$ si respectiv $OAB$ (unde s-a notat $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$) si obtine egalitatile $|b-c|^2 = |b|^2 + |c|^2 + |b| \cdot |c|$ etc. ... 1p
Din identitatea paralelogramului si cele de mai sus obtine egalitatile $|b+c|^2 = |b|^2 + |c|^2 - |b| \cdot |c|$ si analoagele ... 2p
Din inegalitatea mediilor deduce inegalitatile $|b+c|^2 \geq |b| \cdot |c|$ etc. ... 1p
Obtine prin inmultirea acestora inegalitatea din enunt ... 1p
**Problema 4.** Start ... 1p
Observa ca 2011 este numar prim; aplica teorema lui Wilson si deduce ca $2010! + 1$ se divide cu 2011 ... 1p+1p=2p
Presupune ca ar exista o descompunere ca in enunt si arata ca niciunul din cele 2010 numere nu se divide cu 2011; arata ca acestea dau resturile $\{1, 2, \dots, 2010\}$ la impartirea cu 2011 ... 2p
Obtine in termeni de clase de congruenta o egalitate de forma $\prod_{r\in A'} r = \prod_{r\in B'} r$ (modulo 2011) ... 1p
Obtine echivalent $\left(\prod_{r\in A'} r\right)^{2010} = \left(\prod_{r\in\{1,2,\dots,2010\}} r\right)^{1005}$ (modulo 2011) ... 1p

Din teorema lui Fermat deduce ca membrul stang da restul 1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Din teorema lui Wilson si binomul lui Newton deduce ca membrul drept da restul -1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Observa contradictia si trage concluzia ... 1p

**Universitatea de Vest din Timişoara** **Inspectoratul şcolar judeţean**
**Facultatea de Matematică şi Informatică** **Caraş-Severin**

# Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

## Subiecte pentru clasa a XI-a

**1.** Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x - y \in \mathbb{Q}$.

**2.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A \in \mathcal{M}_{2n \times n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n \times 2n}(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea că $AB = C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,2n}}$ are elementele date de

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j; \\ -1 & \text{dacă } |i - j| = n; \\ 0 & \text{dacă } i \not\equiv j (\text{mod } n). \end{cases}$$

Determinaţi produsul $BA$.

**3.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ matrice cu proprietatea că $A \cdot {}^tB$ şi $C \cdot {}^tD$ sunt matrice simetrice, iar $A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC = I_n$. Arătaţi că ${}^tA \cdot D - {}^tC \cdot B = I_n$.

**4.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri definite prin $x_1 = \frac{7}{25}$, $y_1 = \frac{24}{25}$ şi

$$x_{n+1} = x_n cos(y_n) - y_n sin(y_n), \quad y_{n+1} = x_n sin(y_n) + y_n cos(y_n), \quad (\forall) n \geq 1.$$

Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi determinaţi limitele lor.

**Notă:** Timp de lucru - 3 ore

**Concursul interjudeţean de matematică**
**"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,**
**Reşiţa, 25-27 martie 2011**

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XI-a

**1.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| pentru $r \in \mathbb{Q}$ consideră funcţia $g_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_r(x) = f(x+r) - f(x)$ | $1\,p$ |
| $g_r$ este continuă cu $Im(g_r) \subseteq \mathbb{Q}$ | $1\,p$ |
| deci $g_r$ este constantă $\overset{not}{\equiv} c_r \in \mathbb{Q}$ | $1\,p$ |
| consideră $a = c_1 = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$ şi observă că $a \in \mathbb{Q}$,$b \in \mathbb{R}$ | $1\,p$ |
| arată că $c_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot c_1 = \frac{a}{n}$ | $2\,p$ |
| deduce că $c_r = a \cdot r$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$ | $1\,p$ |
| deci $f(r) = ar + b$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$ | $1\,p$ |
| din continuitate obţine că $f(x) = ax + b$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}$ | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**2.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| scrie $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = [B_1 \ B_2]$, cu $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ | $2\,p$ |
| şi $AB = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$ | $2\,p$ |
| obţinecă $A_2 = -A_1$, $B_2 = -B_1$, $B_1 = A_1^{-1}$ | $2\,p$ |
| deduce că $BA = 2 \cdot I_n$ | $3\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**3.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| scrie $A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA$, $C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC$ | $1\,p$ |
| obţine $D \cdot {}^tA - C \cdot {}^tB = I_n$ | $2\,p$ |
| arată că $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$ | $3\,p$ |
| deduce că $\begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I_{2n}$ | $2\,p$ |
| din blocul $(1,1)$ trage concluzia | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**4.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| observă că $x_1 = cos(\alpha_1), y_1 = sin(\alpha_1)$, cu $\alpha_1 = \arcsin \frac{24}{25}$ | $1\,p$ |
| arată prin inducţie că $x_n = cos(\alpha_n), y_n = sin(\alpha_n)$ | $2\,p$ |
| şi $\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n)$ | $1\,p$ |
| arată prin inducţie că $\alpha_n \nearrow$, $\alpha \in (0, \pi)$, $(\forall) n \geq 1$ | $2\,p$ |
| $(\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) > \alpha_n > 0$, | |
| $\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) = \alpha_n + sin(\pi - \alpha_n) < \alpha_n + \pi - \alpha_n = \pi\ )$ | |
| deduce că $(\alpha_n)$ este convergent | $1\,p$ |
| cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = \pi$ | $1\,p$ |
| deduce că $(x_n)$ şi $(y_n)$ sunt convergente cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = -1$ şi $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$ | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**Universitatea de Vest din Timişoara** **Inspectoratul şcolar judeţean**
**Facultatea de Matematică şi Informatică** **Caraş-Severin**

# Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

## Subiecte pentru clasa a XII-a

**1.** Calculaţi integrala

$$\int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{x+263})}{arctg(\sqrt{x+263}) + arctg(\sqrt{2299-x})} dx\,.$$

**2.** Fie $(M, \cdot)$ o mulţime nevidă, înzestrată cu o operaţie binară asociativă, cu proprietatea de simplificare la dreapta şi la stânga(i.e., $xa = ya \Longrightarrow x = y$, resp. $ax = ay \Longrightarrow x = y$) şi astfel încât pentru orice $a \in M$ mulţimea $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ este finită. Arătaţi că $(M, \cdot)$ este un grup.

**3.** Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ.
a) Dacă $char(\mathbb{K}) \neq 2$, arătaţi că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$ cu $x, y \in \mathbb{K}$ este

$$\{(1,0)\} \cup \left\{ \left( \frac{r^2-1}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2} \right) | r \in \mathbb{K} \right\}.$$

b) Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$ în cazul în care $char(\mathbb{K}) = 2$.

**4.** a) Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\, dx\,.$$

b) Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}\,,$$

unde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$, iar $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

**Notă:** Timp de lucru - 3 ore

## Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

**1.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| face schimbarea de variabilă $y = 2036 - x$ | $2\,p$ |
| şi obţine că $I = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{x+263})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})} dx = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{2299-x})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})} dx$ | $3\,p$ |
| obţine că $2I = \int_{25}^{2011} 1\, dx = 1986$ | $2\,p$ |
| deci $I = 993$ | $2\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**2.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ finită $\Longrightarrow (\exists) m, n \in \mathbb{N}^*, m > n : a^m = a^n$ | $2\,p$ |
| din $a^m \cdot x = a^n \cdot x$ deduce că $a^{m-n} \cdot x = x, (\forall) x \in G$ | $1\,p$ |
| analog $x \cdot a^{m-n} = x, (\forall) x \in G$ | $1\,p$ |
| deci $a^{m-n} \overset{not}{=} u_a$ este element unitate | $1\,p$ |
| arată că $u_a = u_b$, $(\forall) a, b \in G$ | $2\,p$ |
| pentru orice $a \in G$ deduce că $a^{m-n-1}$ este invers pentru $a$ | $1\,p$ |
| trage concluzia | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**3.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| a) pentru $S = \{(x,y) \in \mathbb{K} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ şi $A = \{(1,0)\} \cup \left\{ \left( \frac{r^2-1}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2} \right) \mid r \in \mathbb{K} \right\}$ | |
| arată că $1^2 + 0^2 = 1 = \left( \frac{r^2-1}{1+r^2} \right)^2 + \left( \frac{2r}{1+r^2} \right)^2$, deci $A \subseteq S$ | $2\,p$ |
| pentru $x = 1$ rezultă $y = 0$ | $1\,p$ |
| pentru $x \neq 1$ consideră $r = \frac{y}{1-x}$ şi obţine că $r^2(1-x) = 1 + x$ | $1\,p$ |
| deduce că $x = \frac{r^2-1}{1+r^2}$ şi $y = \frac{2r}{1+r^2}$ | $1\,p$ |
| deduce că $S \subseteq A$ | $1\,p$ |
| b) scrie ecuaţia sub forma $(x+y)^2 = 1$ | $1\,p$ |
| deduce că $x + y = 1$ | $1\,p$ |
| obţine că $S = \{(r, r+1) \mid r \in \mathbb{K}\}$ | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |

**4.**

| | |
|---|---|
| start | $1\,p$ |
| a) calculează $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ | $1\,p$ |
| obţine relaţia de recurenţă $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ | $2\,p$ |
| deduce că $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ | $1\,p$ |
| şi $I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ | $1\,p$ |
| b) arată că $I_{2n} > I_{2n+1} > I_{2n+2}$ | $1\,p$ |
| obţine inegalităţile $\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ | $1\,p$ |
| şi $\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ | $1\,p$ |
| trece la limită şi obţine concluzia | $1\,p$ |
| **Total** | **10 p** |