Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Școlar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a V-a

Problema 1: Un număr de telefon are forma $abc-def-ghij$, unde fiecare literă reprezintă o cifră diferită. Cifrele din fiecare parte a numărului de telefon sunt scrise în oridine crescătoare, adică $a<b<c$, $d<e<f$ şi $g<h<i<j$. În plus, d,e,f sunt cifre pare consecutive, g,h,i,j sunt cifre impare consecutive, iar $a+b+c=9$. Aflaţi numărul de telefon.

Problema 2: a) Aflaţi ultima cifră a numerelor $1^2+3^4+5^6+7^8+9^{10}+11^{12}+13^{14}+15^{16}+17^{18}+19^{20}$ şi $21^{22}+23^{24}+25^{26}+27^{28}+29^{30}+31^{32}+33^{34}+35^{36}+37^{38}+39^{40}$.

b) Demonstraţi că numărul $n=1^2+3^4+5^6+...+2009^{2010}+2011^{2012}$ este divizibil cu 10.

Problema 3: O comoară constă în nouă săculeţi care conţin 20, 24, 26, 27, 32, 33, 39, 40 şi 42 de galbeni. Doi piraţi, Will Turner şi căpitanul Jack Sparrow, încearcă toţi galbenii (cu dinţii!) şi constată că toţi galbenii dintr-unul din săculeţi sunt falşi, iar toţi galbenii din ceilalţi săculeţi sunt veritabili. Ei pun săculeţul cu galbenii falşi deoaprte şi împart săculeţii rămaşi astfel încât Jack să primească de două ori mai mulţi galbeni decât Will. Care este săculeţul cu galbenii falşi şi cum şi-au împărţit cei doi piraţi comoara? Justificaţi de ce soluţia găsită este singura pisibilă.

Problema 4: Aflaţi cel mai mic număr $\overline{abc}\left(a\neq 0, c\neq 0\right)$, pentru care suma cifrelor numărului $n=\overline{abc}+\overline{cba}$ este impară.

b) Câte numere $\overline{abc}\left(a\neq 0, c\neq 0\right)$ au proprietatea că suma cifrelor numărului $n=\overline{abc}+\overline{cba}$ este impară?

Probleme selecţionate de Andrei Eckstein

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică și Informatică

Inspectoratul Școlar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a VI-a

1. Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relaţia $\overline{abc} = 18 \cdot (a+b+c)$.
2. Fie a, b, c numere raţionale pozitive.
   a) Arătaţi că dacă $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, atunci $a = b = c$.
   b) Arătaţi că dacă $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, atunci $a = b = c$.
   c) Arătaţi că dacă $\frac{a^2+b^2}{a \cdot b + b \cdot c} = \frac{b^2+c^2}{b \cdot c + c \cdot a} = \frac{c^2+a^2}{c \cdot a + a \cdot b}$, atunci $a = b = c$.
3. În fiecare pătrat al unei table 3×3 stă câte un pitic. Doi piticisunt mincinoşi. Mincinoşii nu spun niciodată adevarul. Ceilalţi 7 pitici spun întotdeauna adevărul. Fiecare pitic este întrebat câţi dintre piticii aflţi în pătratele vecine spun adevărul. (Pătratele vecine au o latură comună). Răspunsurile date de pitici sunt arătate în tabelul de mai jos:

	A	**B**	**C**
1	2	1	1
2	2	3	1
3	2	2	1

   Vom desemna cu **A1** piticul aflat pe linia 1 coloana A, cu **A2** piticul aflat pe linia 2 coloana A, etc.
   a) Arătaţi că cel puţin unul dintre piticii **B1**, **C1** şi **C2** este mincinos.
   b) Arătaţi ce cel puţin unui dintre piticii **A1**, **B2** şi **C3** este mincinos.
   c) Determinaţi poziţiile ocupate de piticii mincinoşi.
4. Într-o grădină sunt 2012 jetoane. Avem voie să facem următoarea operaţie:
   - Alegem o grămadă care conţine cel puţin trei jetoane;
   - Din gramada aleasă îndepărtăm un jeton;
   - Jetoanele rămase în gramada aleasă le impărţim în două grămezi mai mici (având cel puţin câte un jeton).

   Este posibil ca după ce repetmăm această operaţie de un număr de ori să ajungem ca toate grămezile să conţină exact două jetoane? Dar toate grămezile să conţină exact trei jetoane? Justificaţi răsăunsurile.

Probleme selecţionate de Andrei Eckstein

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a
Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a VII-a

1. Fie ABC un triunghi, iar O un punct oarecare în plan. Dacă M,N,P sunt simetricelepunctului O în raport cu mijloacele laturilor $[BC],[CA],[AB]$, arătați că dreptele AM,BN şi CP sunt concurente.
2. Arătaţi că
   a) Numărul 2^4+5^4 este prim.
   b) $641\left|\left(2^7\cdot 5\right)^2-1\right.$ şi $641\left|\left(2^7\cdot 5\right)^4-1\right.$
   c) $641\left|2^{32}+1\right.$.
3. Fie ABC un triunghi, I_a centrul cercului exînscris corespunzător laturii $[BC]$, iar $V\in(AB\setminus(AB)$ şi $W\in(AC\setminus(AC)$ două puncte pe prelungirile laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Arătaţi că
$$I_a\in VW \Leftrightarrow b\cdot\frac{BV}{AV}+c\cdot\frac{CW}{AW}=a .$$
4. O lista L de numere constă iniţial din numerele 24, 3 şi $\frac{201}{2}$. La fiecare pas se adaugă listei media aritmetică a două sau patru dintre numerele deja în listă. Arătaţi că numerele 25, $\frac{81}{7}$ şi 102 nu pot face parte din listă.

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică și Informatică

Inspectoratul Școlar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a
Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_{2n-1}, a_{2n}$ numere reale pozitive. Arătaţi că:

   a) $a_1 + a_2 + ... + a_{2n} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2n}} \geq 4n$;

   b) Dacă $a_1 + a_2 + ... + a_{2n} = n$, atunci
   $$a_1 + a_2 + ... + a_{2n} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2n}} \geq 5n$$

2. Doi jucători, A şi B, scriu, alternativ, cifre distincte din mulţimea $\{0,1,...,9\}$ pe o tablă, formând un număr din ce în ce mai lung. Începe jucătorul A. Primul jucător care scrie un număr divizibil cu 3 pierde. Dacă ambii jucători îşi apără corect şansele, care jucător va câştiga?

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $M \in [AA']$ şi $N \in [BC']$ puncte cu proprietatea $MN \cap B'D \neq \varnothing$. Fie, de asemenea, $A_1, C_1, D_1^{'}, M_1$ proiecţiile punctelor A, C, D', M pe planul $(A'BC')$. Arătaţi că:

   a) Dreapta $B'D$ este perpendiculară pe planele (ACD) şi $(A'BC')$.

   b) $A_1A'D_1^{'}C'C_1B$ este un hexagon regulat;

   c) $AM \cdot A_1A' = A_1M_1 \cdot AA'$;

   d) $\frac{BC'}{BN} = \frac{AM}{AA'} + 1$.

4. Fie $ABCD$, cu $AD \| BC$, un patrulater înscris într-un cerc C de centru O, M punctul de intersecţie al diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. P centru cercului C_1 circumscris triunghiului ΔMAD, Q centrul cercului C_2 circumscris triunghiului ΔMBC, iar N al doilea punct de intersecţie al cercurilor C_1 şi C_2. Arătaţi că:

   a) $MP \perp BC$;

   b) $[OP] \equiv [NQ]$;

   c) $ON \perp MN$.

Probleme selecţionate de Andrei Eckstein

BAREM clasa a V-a

Pb 1: Cifra care nu apare în grupul de cifre g, h, i, j este 1 sau 9. Deoarece $a+b+c=9$, cifra impară care nu apare in grupul de cifre g, h, i, j este 1. Atunci $g=3$, $h=5$, $i=6$, $j=9$. Cifrele d, e, f pot fi 0, 2, 4 sau 2,4,6 sau 4,6,8, deci cifrele pare din grupul a, b, c pot fi 6, 8 sau 0, 8 sau 0,2. Convine numai varianta cu 0 şi 8, deci $a=o, b=1, c=8$. Numărul de telefon este $018-246-3579$.

Pb 2. Analizăm ultima cifră a fiecărui termen al primei sume. Găsim că ultima cifră a primei sume este 4, ultima cifră a celei de-a doua sume este 4. Grupăm termenii în 100 de grupuri a câte 10, şi un grup de 6 termeni. Ultima cifră a sumei termenilor din fiecare grup de 10 este 4, iar ultima cifră a sumei termenilor din grupul de 6 este 0. Ultima cifrăa lui n este 0, deci n este divizibil cu 10.

Pb 3. Săculeţii conţin în total 283 galbeni. Numărul de galbeni veritabili trebuie să fie divizibil cu 3. 283 dă rest 1 la împărţirea cu 3, deci şi numărul de galbeni falşi dă tot rest 1 la împărţirea cu 3. Singurul săculeţ pentru care numărul de galbeni dă rest 1 la împărţirea cu 3 este cel cu 40 de galbeni. Rămân de împărţit 243 de galbeni, deci Will ia 81 de galbeni. Will trebuie sa ia saculeţii cu 39 şi 42 de galbeni (unica soluţie).

Pb 4. Ghiceşte că 515 este cel mai mic număr cu proprietatea cerută şi verifică faptul că $515+515$ are suma cifrelor impară. Arătăm, prin verificare sau tratând cazurile $b \le 4, a+c \le 9$ şi $b \le 4, a+c \ge 10$ că numerele mai mici decât 515 nu convin. Tratând cazurile $b \le 4, a+c \le 9$; $b \le 4, a+c \ge 10$; $b \ge 5, a+c \le 9$ şi $b \ge 5, a+c \ge 10$, constatăm că suma cifrelor lui n este impară dacă şi numai dacă $b \ge 5$ şi $a+c \ne 9$. Există 8 perechi (a,c) cu $a+c=9$, deci $81-8=73$ perechi (a,c) cu $a+c \ne 9$. b poate lua 5 valori, deci sunt $7 \cdot 73 = 365$ numere cu proprietatea dată.