Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a
Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a IX-a

Problema 1: Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n există un număr natural având n cifre, toate impare, care se divide cu 5^n

Problema 2 Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu E_a, E_b, E_c, E_d centrele cercurilor celor nouă puncte corespunzătoare triunghiurilor BCD, CDA, DAB, respectiv ABC. Arătaţi că dreptele AE_a, BE_b, CE_c, DE_d sunt concurente.

Problema 3: a) Arătaţi că dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuţitunghic dat perimetrul minim îl are triunghiul său ortic.
b) Notăm cu R respectiv $\tilde{r}$ raza cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC, respectiv raza cercului înscris în triunghiul determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC. Arătaţi că are loc inegalitatea $R \geq 4\tilde{r}$.

Problema 4: Fie a, b, c, d, e numere reale cu proprietatea că
$a+b+c+d+e=0$ şi $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0$. Arătaţi că
$a(a+c)(a+d)(a+e)=b(b+c)(b+d)(b+e)$.

Probleme selecţionate de lector univ. Dr. Ioan Caşu

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Hunedoara

Concursul interjudeţean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediţia a XXVI-a
Petroşani, 23-25 martie 2012

Clasa a X-a

1. Fie $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, cu $a^2+b^2+c^2\neq 0\neq\alpha\beta\gamma$. Arătaţi că ecuaţia
$$a\cdot 24^{\alpha x}+b\cdot 3^{\beta x}+c\cdot 2012^{\gamma x}=0$$
are cel mult două soluţii reale.

2. Fie A o mulţime infinită cu proprietatea că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi orice $a_1,a_2,...,a_n\in A$ are loc inegalitatea $|a_1+a_2+...+a_n|<1$. Arătaţi că există o funcţie bijectivă $f:\mathbb{N}\to A$.

3. Pe o tablă sunt scrise n numere naturale, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. La fiecare pas se şterg câte două numere a şi b, cu proprietatea că nu se divid vreunul prin celălalt, care se înlocuiesc cu cel mai mare divizor comun şi cu cel mai mic multimplu comun al lor. Arătaţi că după un număr de paşi, numerele de pe tablă nu se mai modifică. Arătaţi că numărul respectiv de paşi este cel mult $(n-1)!$.

4. a) Arătaţi că pentru orice dreaptă d există două numere complexe $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, cu $|\alpha|=1$, astfel încât pentru orice ăunct M din plan de afix z_M are loc echivalenţa
$$M\in d\Leftrightarrow \overline{z_M}=\alpha\cdot z_M+\beta .$$
b) Arătaţi că două drepte d_1 şi d_2 de ecuaţii $d_1:\overline{z}=\alpha_1 z+\beta_1$ şi $d_2:\overline{z}=\alpha_2 z+\beta_2$, unde $\alpha_1,\beta_1\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{C}$ cu $|\alpha_1|=|\alpha_2|=1$, sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\alpha_1+\alpha_2=0$.
c) Arătaţi că dacă dreapta d este dată de ecuaţia $d:\overline{z}=\alpha z+\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, distanţa unui punct M de afix z_M faţă de dreapta d este
$$dist(M,d)=\frac{1}{2}\left|\alpha z_M+\beta-\overline{z_M}\right|.$$
d) Arătaţi că aria unui triunghi ABC cu vârfurile de afixe z_A,z_B,z_C este
$$aria[ABC]=\frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\left(z_A\overline{z}_B+z_B\overline{z}_C+z_C\overline{z}_A\right)\right|.$$

Probleme selecţionate de Andrei Eckstein

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică și Informatică

Inspectoratul Școlar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a
Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, iar $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ două matrice. Arătaţi că
   a) Dacă matricea A este nilpotentă, atunci $A^n = O_n$.
   b) Dacă există $n+1$ numere distincte $t_1, t_2, ..., t_{n+1} \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că matricea $A + t_i B$ esze nilpotentă pentru orice $i = \overline{1, n+1}$, atunci A şi B sunt matrice nilpotente.

2. a) Arătaţi că $(x_n)_{n \geq 1}$, dat de $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ este convergent.
   b) Determinaţi probabilitatea ca două numere din intervalul $[1, n]$ să fie prime între ele.
   c) Dacă $L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \right)$, arătaţi că probabilitatea ca două numere naturale neunle luate la întâmplare să fie prime între ele este $\frac{1}{L}$.

3. Arătaţi că dacă o permutare $\sigma \in S_n$, se descompune într-un produs de k cicluri disjuncte, atunci signatura permutării este
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}.$$

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ numere reale oarecarem $t \in \left(\frac{1}{2012}, 1 - \frac{1}{2012} \right)$ iar şirurile $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ şi
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= tb_n + (1-t)c_n \\ b_{n+1} &= tc_n + (1-t)a_n \\ c_{n+1} &= ta_n + (1-t)b_n \end{aligned}.$$
   Arătaţi ca şirurile $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente şi determinaţi limitele lor.

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Hunedoara

Concursul interjudețean de matematică
TRAIAN LALESCU, Ediția a XXVI-a
Petroșani, 23-25 martie 2012

Clasa a XII-a

1. Fie F mulţimea funcţiilor $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabile cu derivata continuă şi $f(0)=0,\ f(1)=1$. Demonstraţi că

$$\int_0^1 \left| f'(x)-f(x)\right| dx \geq \frac{1}{e}, \forall f \in F$$

şi $\frac{1}{e}$ este cel mai mare număr cu proprietatea de mai sus.

2. Calculaţi

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt$.

(ii) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos x}dx$.

3. Fie M o mulţime nevidă şi $F:M\to M$ o bijecţie cu proprietatea $F(x)\neq x, \forall x\in M$. Pe M definim legea de compoziţie $*: M\times M\to M$, prin $x*y=F(x)$. Demonstraţi că
   a) $x*z=y*z$ implică $x=y$.
   b) Legea $*$ nu este asociativă.
   c) Legea $*$ nu are element neutru.

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu patru elemente, $G=\{e,a,b,c\}$ cu proprietatea $x^2=e, \forall x\in G$, unde e este element neutru.
   a) Întocmiţi tabla operaţiei $\cdot$ pe mulţimea G.
   b) Arătaţi că grupul $(G,\cdot)$ nu este izomorf cu $(Z_4,+)$.
   c) Dacă G_1 este un grup cu patru elemente atunci $G_1\sim G$ sau $G_1\sim Z_4$. Daţi un egemplu de grup izomorf cu G.

BAREM clasa a IX-a

Pb 1. Pb 1. Demonstrăm prin inducţie matematică după n şi se verificăm afirmaţia din concluzie pentru $n=1$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru k, $\overline{a_1a_2...a_k} = p\cdot 5^k$, şi considerăm numerele de $k+1$ cifre, toate impare, $\overline{1a_1a_2...a_k}, \overline{3a_1a_2...a_k}, \overline{5a_1a_2...a_k}, \overline{7a_1a_2...a_k}, \overline{9a_1a_2...a_k}$. Observăm că acestea se pot scrie: $5^k(2^k+p)$, $5^k(3\cdot 2^k+p)$, $5^k(5\cdot 2^k+p), 5^k(7\cdot 2^k+p), 5^k(9\cdot 2^k+p)$. Numerele 2^k+p, $3\cdot 2^k+p, 5\cdot 2^k+p, 7\cdot 2^k+p, 9\cdot 2^k+p$ dau resturi distincte la împărţirea cu 5 şi prin urmare unul dintre ele se divide cu 5. Finalizăm demonstraţia ţinând cont de observaţiile de mai sus.

Pb 2. Dacă notăm cu O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ şi cu H_a, H_b, H_c, H_d ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB respectiv ABC, atunci E_a, E_b, E_c, E_d sunt mijloacele segmentelor (OH_a), (OH_b), $(OH_c), (OH_d)$. Au loc egalităţile vectoriale $\overrightarrow{OE_a} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ (şi analoagele). Un punct M de pe dreapta OE_a este caracterizat de egalitatea $\overrightarrow{OM} = k\cdot\overrightarrow{OA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OE_a}$ pentru $k\in\mathbb{R}$. Observăm că punctul corespunzător lui $k=\frac{1}{3}$ este situat pe toate cele patru drepte AE_a, BE_b, CE_c, DE_d.

Pb 3. a) Fie un triunghi UVW cu proprietatea din enunţ ($U\in(BC)$, etc.); ducem simetricele U', U'' ale lui U faţă de dreptele AB, respectiv AC. Perimetrul triunghiului UVW este egal cu lungimea liniei frânte $U'WVU''$, care este mai mare sau egală decât lungimea segmentului $(U'U'')$. Observăm că $AU' = AU'' = AU$ şi că $m(\sphericalangle U'AU'') = 2m(\sphericalangle A) = const$, deci $U'U''$ este minim când AU este minim, adică atunci când AU este înălţime în triunghiul ABC şamd.

b) Se calculează semiperimetrul triunghiului ortic, $\frac{1}{2}\cdot(a\cos A+b\cos B+c\cos C) = \frac{S}{R} \le \tilde{p}$, unde am notat cu S aria triunghiului ABC şi cu $\tilde{p}$ semiperimetrul triunghiului determinat de picioarele bisectoarelor interioare . Calculăm (cu teorema bisectoarei, etc.) aria triunghiului determinat de picioarele bisectoarelor interioare $\tilde{S} = \frac{2abc\cdot S}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ şi din inegalitatea mediilor se obţine $\tilde{S} \le \frac{S}{4}$.

Din egalitatea $\tilde{r} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{p}}$ şi din cele de mai sus se obţine concluzia $R \ge 4\tilde{r}$.

Pb 4.Calculăm $(x+c)(x+d)(x+e) = x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$ cu $p_1 = c+d+e = -(a+b)$, $p_2 = cd+de+ce$, $p_3 = cde$.

Calculăm $(a+b)^3 = (c+d+e)^3 = \sum c^3 + 3p_1p_2 - 3p_3 = -(a^3+b^3) - 3(a+b)p_2 - 3p_3$.

Din egalităţile de mai sus se deduce $p_3 = (a+b)(ab-p_2)$.

Calculăm $a(a+c)(a+d)(a+e) = a(a^3+p_1a^2+p_2a+p_3) = a\cdot[a^3-(a+b)a^2+p_2a+(a+b)(ab-p_2)] = ab(ab-p_2)$.

Analog are loc $b(b+c)(b+d)(b+e) = ab(ab-p_2)$, ceea ce demonstrează complet egalitatea din concluzie.