Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a V-a

1. Spunem că 1978 este un an ”miraculos” deoarece toate cifrele lui 1978 sunt nenule, iar suma dintre numărul format cu primele două cifre şi numărul format cu ultimele două cifre ale sale este egală cu numărul format cu cele două cifre din mijloc. Ce an miraculos i-a precedat lui 1978 şi care va fi următorul?

* * *

2. La un campionat de fotbal participă 10 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte o singură dată. În fiecare meci, echipa câştigătoare primeşte 3 puncte, iar cea care pierde 0 puncte. În caz de egalitate, ambele echipe primesc câte 1 punct. La sfârşitul campionatului, echipele acumulează în total 119 puncte.
a) Câte meciuri s-au terminat la egalitate?
b) Arătaţi că printre cele 10 echipe există cel puţin una care a terminat la egalitate cel puţin 4 meciuri.

* * *

3. Alina, Bianca şi Cosmin sunt cei trei participanţi la un concurs de cultură generală cu mai multe runde. În fiecare rundă, câştigătorul primeşte a puncte, cel de pe locul doi primeşte b puncte, iar cel de pe ultimul loc primeşte c puncte, unde $a > b > c$ sunt numere naturale nenule. La final Alina totalizează 20 puncte, Bianca 10 şi Cosmin 9. Se ştie că Bianca a câştigat runda a doua.
a) Câte runde s-au desfăşurat?
b) Aflaţi a, b, c şi stabiliţi clasamentul fiecărei runde.

* * *

4. Pentru un număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale impare. De exemplu $s(512416) = 5 + 1 + 1 = 7$, iar $s(224) = 0$. Calculaţi $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(1000)$.

* * *

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VI-a

1) Într-un oraş, 2/3 dintre bărbaţi şi 3/5 dintre femei sunt căsătoriţi. (Perechile locuiesc în acelaşi oraş.) Care este raportul dintre numărul persoanele căsătorite şi cele necăsătorite în acest oraş?

* * *

2) Un număr prim p cu mai mult de doua cifre are ultima cifră egală cu suma celorlalte cifre ale sale.
a) Cu ce cifră se poate termina p?
b) Demonstraţi că numărul $p+4$ este compus.

Dorel Miheţ

3) Numărul $N = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_{2013}}$ are 2013 cifre şi se termină cu cifra 1. Se ştie că fiecare din numerele $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_4}$, $\overline{a_4 a_5}$, ..., $\overline{a_{2011} a_{2012}}$, $\overline{a_{2012} a_{2013}}$ (determinate de câte două cifre vecine ale lui N) se divide sau cu 17 sau cu 23. Aflaţi prima cifră a lui N.

* * *

4) Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ACB$ ale triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) intersectează AC şi AB respectiv în D şi E.
a) Demonstraţi că $\triangle BED$ este triunghi isoscel.
b) Dacă în plus $AD = BC$, aflaţi $m(\angle BDC)$.

Dorel Miheţ

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VII-a

1) Fie $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încât $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 6$.

Demonstraţi că $a \neq b$, iar numărul $\dfrac{a+b}{a-b}$ este iraţional.

* * *

2) Se dă triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează (AC) în D. Demonstraţi că dacă două dintre segmentele $[AD], [BD], [BC]$ sunt congruente, atunci toate cele trei segmente sunt congruente.

Dorel Miheţ

3) În triunghiul ABC cu $AB = 13$, $CA = 15$, $BC = 14$, notăm cu E, D, M respectiv picioarele înălţimii, bisectoarei şi medianei din A. Latura $[BC]$ se împarte în n părţi egale, printre punctele de diviziune aflându-se şi punctele E, D, M. Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a lui n.

Evan Chen (NIMO 2013)

4) a) Fie $m \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $m^2 + 1$ nu se divide cu 7.
b) Există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2013^n + 1$ se divide cu $6^n - 1$?

Dorel Miheţ

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a

Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VIII-a

1) Demonstraţi că dacă a, b sunt numere naturale diferite de zero, iar $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} \in \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1}$ este număr natural.

Prelucrare după Ştefan Smarandache (Olimpiada Naţională 1994)

2) Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral ABC. Demonstraţi că dacă cele patru feţe ale piramidei au ariile egale, atunci $VABC$ este tetraedru regulat.

Dorel Miheţ

3) Fie $x_1, x_2, ..., x_{10} \in \mathbb{N}$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 15$.
Demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 25$.

Andrei Eckstein

4) Se ştie că modificând o singură cifră din scrierea zecimală a numărului $2^{42643801}$ se obţine un număr prim p.
a) Care este ultima cifră a lui p?
b) Arătaţi că 42643801 este număr prim.

Dorel Miheţ

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a V-a

1. Spunem că 1978 este un an ”miraculos” deoarece toate cifrele lui 1978 sunt nenule, iar suma dintre numărul format cu primele două cifre şi numărul format cu ultimele două cifre ale sale este egală cu numărul format cu cele două cifre din mijloc. Ce an miraculos i-a precedat lui 1978 şi care va fi următorul?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**

$\overline{abcd}$ este un an miraculos dacă $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$. Distingem două cazuri: $b+d=c$ şi $a+c=b$, sau $b+d=10+c$ şi $a+c+1=b$. . . . . **(1p)**

Dacă $b+d=c$ şi $a+c=b$, deducem $a+d=0$ - imposibil (a, d - cifre nenule) **(1p)**

Dacă $b+d=10+c$ şi $a+c=10+b$, obţinem $a+d=9$ . . . . **(1p)**

În cazul anului miraculos precedent, trebuie ca $a=1$, deci $d=8$ şi $b=c+2$. Cum $b<9$ este cel mai mare posibil, rezultă că $b=8$ şi $c=6$, deci $\overline{abcd}=1868$. . . . . **(3p)**

În cazul anului miraculos următor, $a=2$, deci $d=7$ şi $b=c+3$. Cum $c>0$ şi b e minim, rezultă $b=4$ şi $c=1$, deci $\overline{abcd}=2417$. . . . . **(3p)**

Variantă:

$\overline{abcd}$ este un an miraculos dacă $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$ adică dacă $10a+b+10c+d=10b+c$, relaţie care revine la $10a+d=9(b-c)$, adică la $\overline{ad}=9(b-c)$. . . . . **(1p)**

Rezultă că $\overline{ad}$ este divizibil cu 9. . . . . **(2p)**

De aici se continuă ca la soluţia de mai sus.

2. La un campionat de fotbal participă 10 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte o singură dată. În fiecare meci, echipa câştigătoare primeşte 3 puncte, iar cea care pierde 0 puncte. În caz de egalitate, ambele echipe primesc câte 1 punct. La sfârşitul campionatului, echipele acumulează în total 119 puncte.
a) Câte meciuri s-au terminat la egalitate?
b) Arătaţi că printre cele 10 echipe există cel puţin una care a terminat la egalitate cel puţin 4 meciuri.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) În total se joacă $9+8+7+\ldots+2+1=45$ meciuri .... **(2p)**

Notăm cu c numărul meciurilor care au avut un câştigător, şi cu e numărul meciurilor care s-au terminat la egalitate. Atunci $c+e=45$ şi $3c+2e=119$. Obţinem $c=29$ şi $e=16$. .... **(3p)**

b) Presupunem că fiecare din cele 10 echipe a făcut cel mult 3 egaluri. Deoarece fiecare meci terminat la egalitate este numărat de doua ori (câte o dată pentru fiecare din cele două echipe), cel mult 15 meciuri s-au terminat la egalitate - contradicţie. Rezultă deci că măcar o echipă a terminat cel puţin 4 meciuri la egalitate .... **(4p)**

3. Alina, Bianca şi Cosmin sunt cei trei participanţi la un concurs de cultură generală cu mai multe runde. În fiecare rundă, câştigătorul primeşte a puncte, cel de pe locul doi primeşte b puncte, iar cel de pe ultimul loc primeşte c puncte, unde $a>b>c$ sunt numere naturale nenule. La final Alina totalizează 20 puncte, Bianca 10 şi Cosmin 9. Se ştie că Bianca a câştigat runda a doua.

a) Câte runde s-au desfăşurat?

b) Aflaţi a, b, c şi stabiliţi clasamentul fiecărei runde.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Fie n numărul de runde jucate. Atunci $n(a+b+c)=39$. Cum $a+b+c>3$, rezultă $a+b+c=13$ şi $n=3$. .... **(2p)**

b) Deoarece Bianca a câştigat o rundă şi a totalizat 10 puncte (adică mai puţin decât $a+b+c=13$ puncte), trebuie ca $a+2c=10$. Deducem deci $b=c+3$. .... **(2p)**

Deoarece Bianca a ieşit ultima în prima şi a treia rundă, Cosmin are cel puţin $2b+c=3c+6$ puncte. Din $3c+6\leq 9$, obţinem $c=1$, deci $b=4$, $a=8$. .... **(3p)**

Runda I: 1. Alina, 2. Cosmin, 3. Bianca;

Runda II: 1. Bianca, 2. Alina, 3. Cosmin;

Runda III : 1. Alina, 2. Cosmin, 3. Bianca. .... **(2p)**

4. Pentru un număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale impare. De exemplu $s(512416)=5+1+1=7$, iar $s(224)=0$. Calculaţi $s(1)+s(2)+s(3)+\ldots+s(1000)$.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Fiecare cifră impară poate apărea în scrierea numerelor $1,2,\ldots,999$ ca şi cifră a unităţilor, zecilor sau sutelor .... **(1p)**

În total, în scrierea numerelor $1,2,\ldots,999$ fiecare cifră impară apare de 300 ori **(6p)**

Cifra 1 apare în plus o dată ca şi cifră a miilor. .... **(1p)**

Suma cerută este deci $300(1+3+5+7+9)+1=7501$ .... **(1p)**

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VI-a

1) Într-un oraş, 2/3 dintre bărbaţi şi 3/5 dintre femei sunt căsătoriţi. (Perechile locuiesc în acelaşi oraş.) Care este raportul dintre numărul persoanele căsătorite şi cele necăsătorite în acest oraş?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
Fie b numărul bărbaţilor şi f numărul femeilor din oraş.
Avem $\frac{2}{3}b = \frac{3}{5}f \overset{\text{not}}{=} k$ .... **(3p)**
deci $b = \frac{3}{2}k$, $f = \frac{5}{3}k$ .... **(1p)**
Avem k bărbaţi căsătoriţi, k femei căsătorite, $b - k = \frac{1}{2}k$ bărbaţi necăsătoriţi, $f - k = \frac{2}{3}k$ femei necăsătorite .... **(2p)**
deci raportul cerut este $\dfrac{k+k}{\frac{1}{2}k + \frac{2}{3}k} = \dfrac{12}{7}$ .... **(3p)**

2) Un număr prim p cu mai mult de doua cifre are ultima cifră egală cu suma celorlalte cifre ale sale.
a) Cu ce cifră se poate termina p?
b) Demonstraţi că numărul $p + 4$ este compus.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Fie a ultima cifră a lui p. Deoarece p este prim, a este o cifră impară, diferită de 5 .... **(1p)**
Din ipoteză rezultă că suma cifrelor lui N este $2a$ .... **(1p)**
Cum p nu se divide cu 3, $a \neq 3$ şi $a \neq 9$ .... **(2p)**
Prin urmare $a = 1$ sau $a = 7$. Ambele cazuri sunt posibile, de exemplu $p = 101$ are ultima cifră 1, iar $p = 167$ are ultima cifră 7 .... **(2p)**
b) Dacă ultima cifră a lui p este 1, atunci $p + 4$ se divide cu 5 şi este mai mare decât 5, deci este compus (sau se observă că $p+4$ are suma cifrelor 6, deci se divide cu 3) .... **(1p)**
Dacă p are ultima cifră 7, atunci suma cifrelor lui p este $2 \cdot 7 = 14$, deci $p + 1$ se divide cu 3 .... **(1p)**
Atunci şi $p + 4$ se divide cu 3, şi fiind diferit de 3, el este compus .... **(1p)**

3) Numărul $N = \overline{a_1a_2a_3...a_{2013}}$ are 2013 cifre şi se termină cu cifra 1. Se ştie că fiecare din numerele $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_2a_3}$, $\overline{a_3a_4}$, $\overline{a_4a_5}$, ..., $\overline{a_{2011}a_{2012}}$, $\overline{a_{2012}a_{2013}}$ (determinate de câte două cifre vecine ale lui N) se divide sau cu 17 sau cu 23. Aflaţi prima cifră a lui N.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
Multiplii de 2 cifre ai numerelor 17 şi 23 sunt: $17, 34, 51, 68, 85$; $23, 46, 69, 92$ **(2p)**
Deducem că, începând de la dreapta, cifrele lui N sunt în ordine: $1, 5, 8, 6, 4, 3, 2, 9, 6, 4, 3, 2, 9, ...$ .... **(2p)**
Se observă că în continuare grupul de 5 cifre $6, 4, 3, 2, 9$ începe să se repete .. **(1p)**
Numărul N are $(2013 - 3) : 5 = 402$ asemenea grupe complete de 5 numere **(2p)**
Deci prima cifră a lui N este 9 .... **(2p)**

4) Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ACB$ ale triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) intersectează AC şi AB respectiv în D şi E.
a) Demonstraţi că $\triangle BED$ este triunghi isoscel.
b) Dacă în plus $AD = BC$, aflaţi $m(\angle BDC)$.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare
Start .... **(1p)**
a) $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (ULU) $\Rightarrow EA = AD$, deci $\triangle AED$ este isoscel cu baza $[ED]$. Exprimând măsura unghiului de la bază în funcţie de măsura unghiului A obţinem $m(\angle AED) = \frac{180° - m(\angle A)}{2}$, iar din triunghiul isoscel $\triangle ABC$ $m(\angle ABC) = \frac{180° - m(\angle A)}{2}$.
Prin urmare $\angle ABC \equiv \angle AED$, deci $ED \| BC$ .... **(2p)**
$ED \| BC \Rightarrow \angle BDE \equiv \angle DBC$ (alterne interne).

Cum $\angle DBC \equiv \angle EBD$ ($[BD]$ este bisectoarea unghiului B), rezultă că $\angle BDE \equiv \angle EBD$, deci $\triangle BED$ este isoscel cu $BE = ED$ .... **(2p)**

b) Din ipoteză, $AD = BC$. Am demonstrat că $\angle ADE \equiv \angle ACB$ şi că $BE = ED$. Cum $BE = DC$ (diferenţe de segmente congruente), $[ED] \equiv [DC]$.

Rezultă că $\triangle ADE \equiv \triangle BCD$ (LUL) .... **(3p)**

Atunci $EA = BD$ şi, cum $EA = AD = BC$, deducem că $BD = BC$.

Notând cu $2x$ măsura unghiului $\angle BDC$ şi scriind că suma măsurilor unghiurilor triunghiului BDC este $180°$ obţinem

$2x + 2x + x = 180°$, deci $x = 36°$, de unde $m(\angle BDC) = 72°$ .... **(2p)**

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VII-a

1) Fie $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încât $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 6$.

Demonstraţi că $a \neq b$, iar numărul $\dfrac{a+b}{a-b}$ este iraţional.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $a = b$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 2$, în contradicţie cu ipoteza. Deci $a \neq b$ .... **(1p)**

Scriem egalitatea $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 6$ sub forma $a^2 + b^2 = 6ab$.

Din această relaţie obţinem $a^2 + b^2 - 2ab = 4ab$, deci $(a-b)^2 = 4ab$ .... **(3p)**

şi $a^2 + b^2 + 2ab = 8ab$, deci $(a+b)^2 = 8ab$ .... **(2p)**

Rezultă că $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2$, deci $\dfrac{a+b}{a-b}$ este iraţional........................ **(3p)**

2) Se dă triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează (AC) în D. Demonstraţi că dacă două dintre segmentele $[AD]$, $[BD]$, $[BC]$ sunt congruente, atunci toate cele trei segmente sunt congruente.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Avem de demonstrat trei implicaţii:

• *Dacă $AD = BD$ atunci $AD = BD = BC$.*

Notând $m(\angle ABD) = x$, avem: $m(\angle BAC) = x$, $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$,

deci $m(\angle BDC) = m(\angle BAC) + m(\angle ABD) = 2x = m(\angle BCA)$, de unde
$BD = BC$. (Se poate chiar afla x, $x = 36°$.) .... **(2p)**

• *Dacă $BD = BC$ atunci $AD = BD = BC$.*

Notând $m(\angle ABD) = x$, avem: $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$, deci şi $2x = m(\angle BDC) = m(\angle BAC) + m(\angle ABD)$, de unde $m(\angle BAC) = x = m(\angle ABD)$, deci $BD = AD$. .... **(2p)**

• *Dacă $AD = BC$ atunci $AD = BD = BC$.*

Din teorema bisectoarei, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC}$.. **(2p)**

Folosind că $AD = BC$ şi $AB = AC$ obţinem din relaţia de mai sus că $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{BC}$.

Unghiul $\angle C$ fiind comun, rezultă că triunghiurile $\Delta\, BCD$ şi $\Delta\, ACB$ sunt asemenea (cazul II de asemănare). Cum $\Delta\, ACB$ este isoscel cu $AC = AB$, rezultă că şi ΔBCD este isoscel, cu $BC = BD$, de unde concluzia. .... **(3p)**

Varianta 2: Ducem $DE \parallel BC$, $E \in AB$. .... **(1p)**

Atunci $\angle ADE \equiv \angle ACB \equiv \angle ABC \equiv \angle AED$, deci $AE = AD$. Rezultă că $BE = CD$. .... **(1p)**

Avem totodată $\angle EDB \equiv \angle DBC \equiv \angle DBE$, deci triunghiul BDE este isoscel cu $DE = BE = CD$. .... **(1p)**

Atunci triunghiurile AED şi BCD sunt congruente (L.U.L), de unde
$AD = BD$. .... **(2p)**

Varianta 3: Să notăm $m(\angle ABD) = x$. Atunci $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$, $m(\angle BAC) = 180° - 4x \overset{\text{not}}{=} y$ şi $m(\angle BDC) = x + y$. Folosind faptul că într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare, avem:
$x < y \Leftrightarrow AD < BD \Leftrightarrow BC < BD \Leftrightarrow x + y < 2x \Leftrightarrow y < x$, contradicţie.
Prin urmare fiecare din presupunerile $x < y$ şi $y < x$ duce la o contradicţie, deci trebuie ca $x = y$, adică $AD = BD = BC$. .... **(5p)**

3) În triunghiul ABC cu $AB = 13$, $CA = 15$, $BC = 14$, notăm cu E, D, M respectiv picioarele înălţimii, bisectoarei şi medianei din A. Latura $[BC]$ se împarte în n părţi egale, printre punctele de diviziune aflându-se şi punctele E, D, M. Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a lui n.

Evan Chen (NIMO 2013)

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Din teorema bisectoarei, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{13}{15}$. Folosind proportii derivate obţinem $BD = \dfrac{13}{2}$, $DC = \dfrac{15}{2}$, deci $DM = \dfrac{1}{2}$ .... **(2p)**

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ABE şi AEC deducem că
$EC^2 - EB^2 = AC^2 - AB^2$, adică $(EC - EB)(EC + EB) = 15^2 - 13^2 = 2 \cdot 28$.

Rezultă că $EC - EB = 4$, deci $EC = 9$, $EB = 5$ .... **(3p)**
Din $DM = \frac{1}{2}$ rezultă că distanţa dintre două puncte de diviziune vecine este $\leq \frac{1}{2}$, deci $n \geq 14 \cdot 2 = 28$ .... **(2p)**.
Pe de altă parte, deoarece $BE = \frac{10}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$, $BM = \frac{28}{2}$, dacă împărţim $[BC]$ în 28 de părţi egale, diviziunea conţine punctele D, E, M. Aşadar valoarea minimă a lui n este 28 .... **(2p)**

4) a) Fie $m \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $m^2 + 1$ nu se divide cu 7.
b) Există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2013^n + 1$ se divide cu $6^n - 1$?

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
a) Numărul m poate avea una din formele $M7$, $M7 \pm 1$, $M7 \pm 2$ sau $M7 \pm 3$. Corespunzător, m^2 poate fi de forma $M7$, $M7+1$, $M7+4$ sau $M7+2$, deci m^2+1 nu se divide cu 7.. **(2p)**
b) Evident $n = 0$ nu convine. Presupunem că ar exista $n \geq 1$, astfel ca $6^n - 1$ să dividă $2013^n + 1$, Atunci ultima cifră a lui $6^n - 1$ este 5, deci $6^n - 1$ este divizibil cu 5. Trebuie atunci ca 5 să dividă $2013^n + 1$. Cum $2013^n + 1$ este număr par, trebuie ca ultima cifră a lui $2013^n + 1$ să fie 0, deci $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$...... **(2p)**
Atunci $6^n - 1 = (7-1)^{4k+2} - 1 = M7 + (-1)^{4k+2} - 1 = M7$, deci $6^n - 1$ se divide cu 7. .... **(3p)**
Rezultă că şi $2013^n + 1$ se divide cu 7, adică $(2013^{2k+1})^2 + 1$ se divide cu 7, în contradicţie cu proprietatea demonstrată la a) (cu $m = 2013^{2k+1}$).
Prin urmare nu există numere naturale n pentru care $2013^n + 1$ să fie divizibil cu $6^n - 1$.. **(2p)**

Inspectoratul şcolar judeţean Arad | Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VIII-a

1) Demonstraţi că dacă a, b sunt numere naturale diferite de zero, iar $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} \in \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1}$ este număr natural.

Prelucrare după Ştefan Smarandache (Olimpiada Naţională 1994)

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**

Dacă $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} = q \in \mathbb{Q}$ atunci $a\sqrt{3}+b = bq\sqrt{3}+q$, adică $(a-bq)\sqrt{3} = q-b$ . . . . . . **(2p)**

Dacă $a-bq \neq 0$ ar rezulta că $\sqrt{3} = \dfrac{q-b}{1-bq} \in \mathbb{Q}$, contradicţie . . . . **(1p)**

Rezultă $a-bq = 0$, deci şi $q-b = 0$. Atunci $a = bq = b^2$ . . . . **(1p)**

Putem scrie atunci $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1} = \dfrac{b^4+b^2+1}{b^2+b+1} = \dfrac{b^4+2b^2+1-b^2}{b^2+b+1} = \dfrac{(b^2+1)^2-b^2}{b^2+b+1} = \dfrac{(b^2+1-b)(b^2+1+b)}{b^2+b+1} = b^2-b+1$ . . . . **(4p)**

care este număr natural fiind întreg şi pozitiv (pentru că $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1} > 0$, sau pentru că $b^2 \geq b$) . . . . **(1p)**

Variantă pentru prima parte: Amplificând cu conjugata numitorului obţinem

$\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} = \dfrac{3ab-b}{3b^2-1} + \dfrac{b^2-a}{3b^2-1}\sqrt{3}$ .... **(2p)**

Cum $\dfrac{3ab-b}{3b^2-1}, \dfrac{b^2-a}{3b^2-1}$ sunt numere raţionale, ... **(1p)**

$\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\dfrac{b^2-a}{3b^2-1} = 0$, adică dacă şi numai dacă $b^2 = a$ .... **(1p)**

2) Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral ABC. Demonstraţi că dacă cele patru feţe ale piramidei au ariile egale, atunci $VABC$ este tetraedru regulat.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Fie O proiecţia lui V pe planul bazei, iar M, N, P picioarele perpendicularelor din O pe AB, BC, CA (respectiv).

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că VM, VN, VP sunt înălţimi în triunghiurile VAB, VBC, VCA .... **(1p)**

Deoarece $AB = BC = CA = a$, iar feţele laterale au aceeaşi arie, deducem că $VM = VN = VP$, iar din $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{VAB}$ obţinem că $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .... **(2p)**

Rezultă că $\triangle VOM \equiv \triangle VON \equiv \triangle VOP$, deci $OM = ON = OP$. Prin urmare O este sau punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare sau punctul de intersecţie a două din bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC .... **(2p)**

În primul caz, O coincide cu punctul de intersecţie a mediatoarelor laturilor triunghiului ABC, deci $VA = VB = VC$. În plus, din $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{VAB}$ rezultă $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci $VA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$, adică feţele laterale sunt triungiuri echilaterale .... **(1p)**

Arătăm că al doilea caz este imposibil. Presupunem că O este la intersecţia bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A şi C. Atunci $\triangle OAC$ este triunghi echilateral (are două unghiuri de măsură $60°$) .... **(1p)**

deci $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ceea ce este absurd, căci triunghiul VPC ar avea ipotenuza VP egală cu OP, care este catetă .... **(2p)**

Pentru tratarea completă a primului caz se acordă **5p**.

Observaţie. Un tetraedru cu toate feţele de aceeaşi arie se numeşte tetraedru echifacial. Într-un tetraedru echifacial muchiile opuse sunt congruente.

3) Fie $x_1, x_2, ..., x_{10} \in \mathbb{N}$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 15$.
Demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 25$.

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**

Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski rezultă că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 22,5$, deci $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 23$ . . . . **(3p)**

Deoarece $x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2$ are aceeaşi paritate cu $x_1+x_2+...+x_{10}$, rămâne să demonstrăm că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \neq 23$ . . . . **(2p)**

Pentru aceasta considerăm scrierile lui 23 ca sumă de cel mult 10 pătrate perfecte nenule şi arătăm că $x_1 + ... + x_{10} \neq 15$:

$16 + \underbrace{1 + ... + 1}_{7} \rightsquigarrow 4 + 7 = 11$

$16 + 4 + 1 + 1 + 1 \rightsquigarrow 4 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$

$9 + 9 + \underbrace{1 + ... + 1}_{5} \rightsquigarrow 6 + 5 = 11$

$9 + 9 + 4 + 1 \rightsquigarrow 6 + 3 = 9$

$9 + 4 + 4 + \underbrace{1 + ... + 1}_{6} \rightsquigarrow 3 + 4 + 6 = 13$

$9 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 \rightsquigarrow 3 + 6 + 2 = 11$

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 \rightsquigarrow 10 + 3 = 13$ . . . . **(4p)**

Observaţie. Valoarea minimă a lui $\sum x_i^2$ este 25 şi se atinge când 5 dintre numerele $x_1, ..., x_{10}$ sunt 2, iar celelalte 1.

Soluţia a II-a

Start . . . . **(1p)**

Dacă printre cele zece numere sunt 0-uri atunci există neapărat şi numere x cu $x > 1$ şi înlocuind perechea $(0, x)$ cu $(1, x - 1)$ micşorăm suma pătratelor. Scăpăm astfel de 0-uri . . . . **(3p)**

La fel, dacă printre numerele date există şi $x > 2$, atunci neapărat printre ele este şi 1. Înlocuind perechea $(x, 1)$ cu $(x - 1, 2)$ micşorăm iarăşi suma pătratelor . . . . **(3p)**

Astfel minimul se obţine atunci când toate numerele sunt 1 sau 2 . . . . **(1p)**

Se constată imediat că pentru a obţine suma 15 trebuie ca 5 dintre numerele $x_1, ..., x_{10}$ să fie 2, iar celelalte 1. Deci valoarea minimă pentru $\sum x_i^2$ este $5 \cdot 4 + 5 = 25$ .... **(2p)**

Soluţia a III-a

Start .... **(1p)**

Pentru orice număr natural n este adevărată inegalitatea $n^2 \geq 3n - 2$ (se reduce la $(n-1)(n-2) \geq 0$) .... **(6p)**

Deci $\sum x_i^2 \geq 3 \sum x_i - 20 = 25$ .... **(3p)**

4) Se ştie că modificând o singură cifră din scrierea zecimală a numărului $2^{42643801}$ se obţine un număr prim p.

a) Care este ultima cifră a lui p?

b) Arătaţi că 42643801 este număr prim.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Numărul $2^{42643801}$ se termină cu cifra 2 .... **(1p)**

deci pentru a obţine numărul p trebuie să modificăm ultima cifră a sa .... **(1p)**

Arătăm că această cifră trebuie schimbată în cifra 1 (deci p se termină în 1). Într-adevăr:

-Dacă $u(p) = 3$, atunci $p = 2^{42643801} + 1$. Această egalitate este însă imposibilă, deoarece $2^{42643801} + 1$ se divide cu 3 .... **(1p)**

-Dacă $u(p) = 7$, atunci $p = 2^{42643801} + 5$. Însă $2^{42643801} + 5 = 2 \cdot 2^{42643800} + 5 = 2 \cdot 8^{14214600} + 5 = 2(7k+1) + 5$ este multiplu de 7, contrazicând faptul că p este prim .... **(2p)**

-Dacă $u(p) = 9$, atunci $p = 2^{42643801} + 7 = 2^{42643801} + 1 + 6$ se divide cu 3, absurd .. **(1p)**

b) Din a) rezultă că numărul $p = 2^{42643801} - 1$ este prim. Presupunem prin absurd că numărul 42643801 este compus.

Atunci $42643801 = m \cdot n$, cu $1 < m, n < 42643801$, deci $1 < 2^m - 1 < 2^{42643801} - 1$ şi $2^{42643801} - 1 = 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1$ se divide cu $2^m - 1$, absurd. Contradicţia la care am ajuns ne arată că 42643801 este prim .... **(3p)**

Observaţie. Un număr prim de forma $2^n - 1$ se numeşte număr prim Mersenne. Dacă $2^n - 1$ este număr prim Mersenne, atunci n este prim. Numărul p din problemă este un număr prim Mersenne care are 12.837.064 cifre (al treilea ca mărime cunoscut până în prezent).