Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi

$$x_{n+2} = \text{restul împărţirii numărului } 23x_n + 27x_{n+1} \text{ prin } 2013\,.$$

Arătaţi că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+k} = x_n$, $(\forall) n \geq n_0$.

2. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 = 2y \\ y^3 - y + 2 = 2z \\ z^3 - z + 2 = 2x. \end{cases}$$

3. Fie ABC un triunghi oarecare, de laturi a, b şi c, D - punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează cercul circumscris triunghiului, iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ puncte diferite de vârfurile triunghiului.

a) Determinaţi $y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{AD} = y \cdot \overline{AB} + z \cdot \overline{AC}\,.$$

b) Dacă P_1, P_2, P_3 sunt trei puncte în planul $\mathcal{P}$ al triunghiului, iar $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1,3}$ sunt trei triplete de numere reale cu proprietatea că $x_i + y_i + z_i = 1$, $(\forall) i = \overline{1,3}$ şi

$$\overline{OP_i} = x_i \cdot \overline{OA} + y_i \cdot \overline{OB} + z_i \cdot \overline{OC} \quad , (\forall) O \in \mathcal{P},$$

atunci punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$ux_i + vy_i + wz_i = 0 \quad , (\forall) i = \overline{1,3}.$$

c) Arătaţi că punctele M, N şi D sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$$

4. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$.

a) Arătaţi că dacă o dreaptă (d) care trece prin vârful A al triunghiului intersectează dreapta BC într-un punct P, iar cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară într-un punct Q, atunci $AP \cdot AQ = AB^2$.

b) Fie $\mathcal{C}$ un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC într-un punct M aflat pe arcul BC care nu coţine punctul A, şi tangent laturii $[BC]$ a triunghiului într-un punct N. Arătaţi că punctele A, M şi N sunt coliniare.

Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere complexe nenule cu $|a| = |b| = |c|$. Arătaţi că dacă ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are o soluţie de modul egal cu 1, atunci $b^2 = ac$.

2. a) Să se descompună în factori expresia

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y).$$

b) Fie P un punct oarecare în planul unui triunghi oarecare ABC de laturi $BC = a, CA = b, AB = c$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG,$$

unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

3. a) Să se arate că pentru orice două numere reale strict pozitive $a < b$ şi pentru orice număr natural n există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$a^n - b^n = n(a-b)c^{n-1}.$$

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$4^m + 7^m = 5^m + 6^m.$$

4. a) Fiind dat un triunghi ascuţitunghic ABC punctul unic Ω situat în interiorul triunghiului cu proprietatea că

$$\angle \Omega BC \equiv \angle \Omega CA \equiv \angle \Omega AB$$

se numeşte *punctul Brocard* al triunghiului ABC. Măsura comună a celor trei unghiuri de mai sus se notează cu ω. Să se arate că are loc egalitatea

$$\text{ctg}\omega = \text{ctg}A + \text{ctg}B + \text{ctg}C.$$

b) Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B + \text{ctg}C \geq \sqrt{3}.$$

c) Să se arate că pentru orice punct P situat în interiorul unui triunghi ascuţitunghic ABC cel puţin unul dintre unghiurile $\angle PBC, \angle PCA, \angle PAB$ are măsura mai mică sau egală decât $30°$.

Probleme selecţionate de lector univ. dr. Ioan Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad
Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a XI-a

1. Fie $\mathrm{Circ}(3,\mathbb{C}) = \left\{ \mathrm{circ}(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$ şi $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}$, unde $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$.
   (a) Arătaţi că pentru fiecare $A \in \mathrm{Circ}(3,\mathbb{C})$, matricea $E^{-1}AE$ are toate elementele nesituate pe diagonala principală, nule.
   (b) Fie A, B, C vârfurile unui triunghi. Dacă notăm cu a, b, c afixele punctelor A, B, C, arătaţi că $\det(\mathrm{circ}(a,b,c)) = 0$ dacă şi numai dacă punctul O de afix 0 este centrul de greutate al ΔABC, sau dacă ΔABC este echilateral.

2. Determinaţi toate funcţiile $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:
   (a) $f(xy) = f(x) \cdot \sqrt[3]{y} + f(y) \cdot \sqrt{x}$, pentru orice $x, y \in [0,\infty)$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x+1)}{x} = l \in \mathbb{R}$.

3. (a) Dacă $A \in \mathcal{M}_{2013}(\mathbb{R})$, arătaţi că $(A^2 + I_{2013})^m \neq O_{2013}$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Rămâne adevărată cerinţa similară celei de la subpunctul anterior în cazul când $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$? Justificaţi răspunsul.

4. Se dă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin recurenţa
$$x_n = \frac{n+1}{n} \cdot x_{n-1} - \left\{ \frac{x_{n-1}}{n} \right\}, \text{pentru orice } n \geq 1, \text{unde } x_0 = a \geq 1.$$
   (a) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{[a] \cdot n} \right)^n$.
   (b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left([x_0] + \left[\dfrac{x_1}{2} \right] + \left[\dfrac{x_2}{3} \right] + \cdots + \left[\dfrac{x_{n-1}}{n} \right] \right)$.

   (Prin $[x]$, $\{x\}$ am notat partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.)

Subiect propus de conf.dr. Răzvan Tudoran

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a XII-a

1. a) Fie $G = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Este grupul $(\mathbb{Q}, +)$ izomorf cu $(G, \cdot)$?
b) Sunt izomorfe grupurile multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi aplicaţia $f : G \longrightarrow G$ definită prin $f(x) = x^3$, $(\forall)x \in G$. Demonstraţi că
a) dacă f este morfism injectiv, atunci G este abelian.
b) dacă f este morfism surjectiv, atunci G este abelian.

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \quad , (\forall)x > 0.$$

Demonstraţi că f nu admite primitive.

4. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietăţile:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{şi} \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 0\,.$$

Demonstraţi că există $a, b \in [0, 1], a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$.

Subiect propus de conf.dr. Silviu Birăuaş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi

$$x_{n+2} = \text{restul împărţirii numărului } 23x_n + 27x_{n+1} \text{ prin } 2013\,.$$

Arătaţi că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)n \geq n_0$.

start	1p
observă că $x_n \in \{0, 1, \ldots, 2012\}, (\forall)n \in \mathbb{N}$	2p
deduce că $(x_n, x_{n+1}) \in \{0, 1, \ldots, 2012\} \times \{0, 1, \ldots, 2012\}, (\forall)n \in \mathbb{N}$	2p
cum $\{0, 1, \ldots, 2012\} \times \{0, 1, \ldots, 2012\}$ este finită,	
deduce că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, cu $(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = (x_{n_0+k}, x_{n_0+k+1})$	3p
arată prin inducţie după n că $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)n \geq n_0$	2p
total	**10p**

2. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 = 2y \\ y^3 - y + 2 = 2z \\ z^3 - z + 2 = 2x. \end{cases}$$

start	1p
observă că $x^3 - 3x + 2 = 2(y - x)$(şi analoagele)	2p
descompune $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$	2p
deduce că dacă $x \in \{-2, 1\}$, atunci $x = y = z$	2p
arată că dacă $x < -2$, atunci $x > y$, de unde $x > y > z > x$	1p
arată că dacă $x > -2, x \neq 1$, atunci $x < y$, de unde $x < y \leq z \leq x$	1p
deduce că singurele soluţii sunt $(-2, -2, -2)$ şi $(1, 1, 1)$	1p
total	**10p**

3. Fie ABC un triunghi oarecare, de laturi a, b şi c, D - punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează cercul circumscris triunghiului, iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ puncte diferite de vârfurile triunghiului.
a) Determinaţi $y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{AD} = y \cdot \overline{AB} + z \cdot \overline{AC}\,.$$

b) Dacă P_1, P_2, P_3 sunt trei puncte în planul $\mathcal{P}$ al triunghiului, iar $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1,3}$ sunt trei triplete de numere reale cu proprietatea că $x_i + y_i + z_i = 1$, $(\forall)i = \overline{1,3}$ şi

$$\overline{OP_i} = x_i \cdot \overline{OA} + y_i \cdot \overline{OB} + z_i \cdot \overline{OC} \quad, (\forall)O \in \mathcal{P},$$

atunci punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$ux_i + vy_i + wz_i = 0 \quad, (\forall)i = \overline{1,3}.$$

c) Arătaţi că punctele M, N şi D sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$$

start	1p
a) arată că D este mijlocul segmentului $[II_a]$(cu notaţiile clasice)	1p
deduce că dacă $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AI} + \frac{1}{2}\overline{AI_a}$	0,5p
cum $\overline{AI} = \frac{b}{a+b+c} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overline{AC}$ şi $\overline{AI_a} = \frac{b}{-a+b+c} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{-a+b+c} \cdot \overline{AC}$,	1p
obţine că $\overline{AD} = \frac{b}{-a^2+(b+c)^2} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{-a^2+(b+c)^2} \cdot \overline{AC}$	0,5p
b) consideră $\overline{P_1P_2}$ şi $\overline{P_1P_3}$ şi obţine că	
P_1, P_2, P_3-coliniare$\Longleftrightarrow \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ (1)	0,5p
pentru ($\Longrightarrow$) obţine că $u = y_1z_2 - y_2z_z$, $v = z_1x_2 - z_2x_1$, $w = x_1y_2 - x_2y_1$ verifică cerinţa	1p
pentru ($\Longleftarrow$) dacă $ux_i + vy_i + wz_i = 0, (\forall) i = \overline{1,3}$,	
atunci $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} = -\frac{v-w}{u-w} = \frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}$	1p
de unde obţine că $\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$	0,5p
c) arată că pentru $M(x_M, y_M, 0)$ are loc $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}$,	
iar pentru $N(x_N, 0, z_N)$ $\frac{x_N}{z_N} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}$	1p
consideră ecuaţia dreptei MN de forma $ux + vy + wz = 0$,	
pentru care obţine că $\frac{v}{u} = -\frac{x_M}{y_M} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$,	
respectiv $\frac{w}{u} = -\frac{x_N}{z_N} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}$	1p
din a) deduce că $D\left(\frac{-a^2}{-a^2+(b+c)^2}, \frac{b(b+c)}{-a^2+(b+c)^2}, \frac{c(b+c)}{-a^2+(b+c)^2}\right)$	0,5p
deduce că $D \in MN \Longleftrightarrow b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$	0,5p
total	**10p**

4. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$.
a) Arătaţi că dacă o dreaptă d care trece prin vârful A al triunghiului intersectează dreapta BC într-un punct P, iar cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară într-un punct Q, atunci $AP \cdot AQ = AB^2$.
b) Fie $\mathcal{C}$ un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC într-un punct M aflat pe arcul BC care nu coţine punctul A, şi tangent laturii $[BC]$ a triunghiului într-un punct N. Arătaţi că punctele A, M şi N sunt coliniare.

start	1p
a) arată că $\widehat{APB} \equiv \widehat{ABQ}$(dacă $P \in (BC.)$	2p
deduce că $\Delta\, APB \sim \Delta\, ABQ$	1p
şi obţine că $AP \cdot AQ = AB^2$	1p
b) consideră centrele O al cercului circumscris $\Delta\, ABC$ şi O_1 al cercului $\mathcal{C}$	
observă că O, O_1, M sunt coliniare	1p
arată că $\widehat{AMO} \equiv \widehat{OAM}$	1p
consideră $N' \in [AM] \cap [BC]$ şi obţine că $\widehat{AMO} \equiv \widehat{O_1N'M}$	1p
deduce că $AO \parallel N'O_1$, deci $N'O_1 \perp BC$	1p
deduce că $N = N' \in AM$	1p
total	**10p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

BAREM

Clasa a X-a

1. Start ... 1p
Din relaţiile lui Viète se obţine $1 = \frac{|c|}{|a|} = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_2|$, deci şi a doua soluţie are modulul 1 ... 2p
Din relaţiile lui Viète se obţine $|z_1 + z_2| = \frac{|b|}{|a|} = 1$ ... 1p
Însă $1 = |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_1 + z_2} = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2})$ ... 2p
Se înlocuiesc egalităţile $\bar{z_1} = \frac{1}{z_1}, \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$ în egalitatea precedentă ... 1p
Se obţine $1 = (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ ... 2p
Din relaţiile lui Viète se obţine $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c}{a}$, adică egalitatea din concluzie ... 1p.

2. Start ... 1p
Se obţine factorizarea:
$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = (x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$ ... 3p
Se consideră $x = z_P - z_A, y = z_P - z_B, z = z_P - z_C$, unde z_A, z_B, z_C, z_P sunt afixele punctelor A, B, C, P ... 1p
Se observă că $|x| = PA, |y| = PB, |z| = PC, |x-y| = AB = c, |y-z| = BC = a, |x-z| = AC = b$ ... 1p
De asemenea $x + y + z = 3\left(z_P - \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) = 3(z_P - z_G)$, unde z_G este afixul centrului de greutate G ... 1p
Se trage concluzia că $|x+y+z| = 3PG$ ... 1p
Se trece la modul în egalitatea obţinută la punctul a) şi se obţine
$|x|^3|y-z| + |y|^3|z-x| + |z|^3|x-y| \geq |x-y||y-z||x-z||x+y+z|$, care conduce la inegalitatea din enunţ ... 2p.

3. Start ... 1p
Se tratează separat cazurile $n = 0$ şi $n = 1$ ... 1p
Se deduce că $\frac{a^n - b^n}{n(a-b)} = \frac{a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}}{n}$ ... 1p
Se observă că $a^{n-1} < a^{n-2}b < ... < ab^{n-2} < b^{n-1}$ şi se obţine $a^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{n(a-b)} < b^{n-1}$ de unde rezultă concluzia de la punctul a) ... 2p
Se observă că ecuaţia de la punctul b) are soluţiile $m = 0$ şi $m = 1$; se presupune că ar exista cel puţin încă o soluţie ... 1p
Se scrie echivalent ecuaţia de la punctul b) în forma $5^m - 4^m = 7^m - 6^m$; se

aplică rezultatul de la punctul a) şi se obţine că există $c_1 \in (4,5), c_2 \in (6,7)$ astfel încât $mc_1^{m-1} = 5^m - 4^m = 7^m - 6^m = mc_2^{m-1}$ ... 3p
Deoarece $m \neq 0,1$ rezultă $c_1 = c_2$, contradicţie; aşadar ecuaţia are soluţiile $m = 0; m = 1$ ... 1p.

4. Start ... 1p
Din teorema sinusurilor în triunghiurile $AB\Omega, BC\Omega, ABC$ rezultă egalităţile
$\frac{B\Omega}{AB} = \frac{\sin\omega}{\sin B}; \frac{B\Omega}{BC} = \frac{\sin(C-\omega)}{\sin C}; \frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}$ ... 1p
Din egalităţile precedente se obţine
$\frac{\sin(C-\Omega)}{\sin\omega} = \sin C \text{ctg}\omega - \cos C = \sin C \cdot \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \sin C \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \sin C(\text{ctg}A + \text{ctg}B)$, de unde prin împărţire cu $\sin C$ rezultă egalitatea de la punctul a) ... 2p
Se deduce inegalitatea de la punctul b) aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe ctg (sau în orice altă manieră corectă) ... 2p
Din punctele a) şi b) se deduce că măsura unghiului Brocard ω este mai mică sau egală decât $30°$, utilizând faptul că funcţia ctg este descrescătoare ... 2p
Punctul P este situat în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile $BC\Omega, CA\Omega, AB\Omega$ şi cel puţin unul dintre unghiurile $\angle PBC, \angle PCA, \angle PAB$ are măsura mai mică sau egală decât ω şi cu atât mai mult decât $30°$ ... 2p.

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

1.

start	1p
a) Obţine: $E^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix}$	1p
Obţine $E^{-1}AE = \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+\epsilon b+\epsilon^2 c & 0 \\ 0 & 0 & a+\epsilon^2 b+\epsilon c \end{bmatrix}$	2p
b) Observă că $det(circ(a,b,c)) = det(E^{-1} \cdot circ(a,b,c) \cdot E) = (a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c)$	2p
Observă $det(circ(a,b,c)) = 0$ echivalent cu $a+b+c=0$ sau $(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c) = 0$	1p
Reduce $a+b+c=0$ echivalent cu $\frac{1}{3}(a+b+c)=0$, deci $G=O$.	1p
Deduc $(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c) = 0$ ceea ce este echivalent cu $\triangle ABC$ este echilateral.	2p
total	**10p**

2.

start	1p
a) Deduce $f(0)=f(1)=0$ şi $f(x^2) = (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})f(x); \forall x \geq 0$	1p
Obţine inductiv $f(x^{2^n}) = (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\dots\left(\sqrt[3]{x^{2^{n-1}}}+\sqrt{x^{2^{n-1}}}\right)$; $(\forall)x \geq 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^n$.	
Deduce $f(x^{2^n}) = \frac{\sqrt[3]{x^{2^n}}-\sqrt{x^{2^n}}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} f(x)$;	1p
$\forall x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, orice $n \in \mathbb{N}^*$	2p
Pentru $x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ $x \to e^{\frac{z}{2^n}}$, $z \neq 0$ obţine	
$f(e^z) = \dfrac{\sqrt[3]{e^z}-\sqrt{e^z}}{\sqrt[3]{e^{\frac{z}{2^n}}}-\sqrt{e^{\frac{z}{2^n}}}} \cdot f\left(e^{\frac{z}{2^n}}\right)$	
pentru orice $z \neq 0$ şi pentru $n \in \mathbb{N}^*$	2p
b) Rescrie sub forma $f(e^z) = (\sqrt[3]{e^z}-\sqrt{e^z}) \cdot \dfrac{f(e^{\frac{z}{2^n}})}{e^{\frac{z}{2n}}-1} \cdot \dfrac{e^{\frac{z}{2^n}}-1}{\sqrt[3]{e^{\frac{z}{2^n}}}-\sqrt{e^{\frac{z}{2^n}}}}$	
oricare ar fi $z \neq 0$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$	1p
Foloseşte $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{f(t)}{t-1} = l$ şi $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}} = -6$ şi deduce $f(e^z) = 6l(\sqrt{e^z}-\sqrt[3]{e^z})$ pentru orice $z \neq 0$	1p
Cum $f(0)=f(1)=0$ deduce $f(x) = 6l(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})$, oricare ar fi $x \geq 0$	1p
total	**10p**

3.

start	1p
a) $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_{2013}) \in \mathbb{R}[X]$, $grad(p_A) = 2013 \in 2\mathbb{N}+1$	
rezultă că există $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ rădăcină.	1p
$det(A - \lambda \cdot I_{2013}) = 0$ rezultă că există $u_0 \in \mathcal{M}_{2013,1}(\mathbb{R})$, $u_0 \neq \overline{0}$;	
$(A - \lambda_0 \cdot I_{2013})u_0 = \overline{0}$.	1p
$Au_0 = \lambda_0 u_0$ rezultă $(A^2 + I_{2013})u_0 = (\lambda_0^2 + 1)u_0$ rezultă inductiv	
$(A^2 + I_{2013})^k u_0 = (\lambda_0^2 + 1)^k u_0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.	2p
Presupunem prin absurd că există $m_0 \in \mathbb{N}$, $(A^2 + I_{2013})^{m_0} = O_{2013}$	
$(A^2 + I_{2013})^{m_0} u_0 = \overline{0}$ rezultă deci: $(\lambda_0^2 + 1)^{m_0} u_0 = \overline{0}$,	1p
$u_0 \neq \overline{0}$ deci $(\lambda_0^2 + 1)^{m_0} = 0$, absurd, aşadar $\lambda \in \mathbb{R}$.	1p
b) Pentru $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$ cerinţa nu este adevărată.	
Construieşte $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$ pentru care există $m_0 \in \mathbb{N}$ cu $(A^2 + I_{2014})^{m_0} = O_{2014}$	
Construim matricea formată din blocurile de matrice B şi C care are pe diagonala principală	
elementele $B, C, \ldots C$, unde B este matricea: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
şi $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, iar în rest matricea nulă O.	
Facem $B^2 + I_4 = N$ şi vedem că $N^m = O_4$ pentru $m \geq 2$, $C^2 = -I_2$.	
În urma calculelor obţinem că $(A^2 + I_{2014})^m = O_{2014}$, $(\forall) m \geq 2$.	3p
total	**10p**

4.

start	1p
Rescrie relaţia de recurenţă $x_n = x_{n-1} + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$ pentru $n \geq 1$	1p
Demonstrează inductiv $x_n = n \cdot [a] + a$, pentru orice $n \geq 0$	3p
Observă: $\left(\frac{x_n}{[a]n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n[a]}\right)^{\frac{n \cdot [a]}{a}}\right]^{\frac{a}{[a]}} \to e^{\frac{a}{[a]}}$	2p
Observă $x_k - x_{k-} = \left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]$ pentru orice $k \geq 1$ şi prin sumare	
deducem $x_n - x_0 = [x_0] + \ldots + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$ pentru orice $n \geq 1$	2p
Înlocuind $x_n = n\,[a] + a$, pentru orice $n \geq 0$ deducem $\frac{1}{n}\left([x_0] + \ldots + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]\right) = [a]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$	1p
total	**10p**

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

1. a) Fie $G = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Este grupul $(\mathbb{Q}, +)$ izomorf cu $(G, \cdot)$?
b) Sunt izomorfe grupurile multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

start	1p
a) Cele două grupuri nu sunt izomorfe.	
În grupul $(\mathbb{Q}, +)$, pentru orice $\in \mathbb{Q}$, ecuaţia $x + x = a$are o soluţie: $x = \frac{a}{2}$	2p
În grupul $(G, \cdot)$ ecuaţia corespunzătoare	
$x \cdot x = a$ nu are soluţie pentru orice $a \in G$.	
Dacă $a = 2$ ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţii în G.	2p
b) Ecuaţia $x^3 = 1$ are o soluţie în $(\mathbb{R}^*, \cdot)$	
şi trei soluţii în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.	
Prin urmare cele două grupuri nu sunt izomorfe.	5p
total	**10p**

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi aplicaţia $f : G \longrightarrow G$ definită prin $f(x) = x^3$, $(\forall)x \in G$. Demonstraţi că
a) dacă f este morfism injectiv, atunci G este abelian.
b) dacă f este morfism surjectiv, atunci G este abelian.

start	1p
a) Fie $a, b \in G$. Atunci $a^3b^3 = (ab)^3$	
rezultă $a^2b^2 = (ba)^2$ rezultă $a^4b^4 = (a^2)^2(b^2)^2 = (b^2a^2)^2 = (ab)^4$.	
Rezultă $a^3b^3 = (ba)^3$, de unde $(ab)^3 = (ba)^3$	3p
Din injectivitate rezultă $ab = ba$	2p
b) $a^3b^3 = (ba)^3 = (ba)^2(ba) = a^2b^2(ba)$	2p
Rezultă $ab^3 = b^3$. f fiind injectivă,	
b^3 ia orice valoare din G, deci G este abelian	2p
total	**10p**

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \quad , (\forall)x > 0.$$

Demonstraţi că f nu admite primitive.

start	1p
Presupunem prin absurd că f admite primitive; fie F o primitivă a lui f	1p
Avem: $f(x) \geq \dfrac{1}{x}, (\forall)x > 0$ atunci	
$f\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq x, (\forall)x > 0$ rezultă $-\dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq -\dfrac{1}{x}, (\forall)x > 0$	
rezultă $\left(F\left(\dfrac{1}{x}\right) + ln(x)\right)' \leq 0$	4p
Considerăm funcţia $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(\frac{1}{x}) + ln(x)$,	
avem că ϕ este descrescătoare.	3p
Obţinem $\phi(1) = F(1) \geq \lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = F(0) + \lim\limits_{x \to \infty} ln(x) = \infty$. Absurd	1p
total	**10p**

4. Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietăţile:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{şi} \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 0\,.$$

Demonstraţi că există $a, b \in [0,1], a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$.

start	1p
Din faptul că f este continuă şi $\int_0^1 f(x)dx = 0$ rezultă că există $a \in (0,1)$ astfel încât $f(a) = 0$.	5p
Presupunem că a este singurul punct în care f se anulează. Atunci funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a)f(x)$ este continuă şi păstrează semn constant pe $[0,1]$. Avem: $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 [xf(x) - af(x)]dx = 0$	3p
Absurd, deoarece g păstrează semn constant pe $[0,1]$.	1p
total	**10p**