Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a V-a

1. Aflaţi cel mai mare număr de cinci cifre astfel încât cea de-a patra cifră să fie mai mare decât cea de-a cincea, a treia să fie mai mare decât suma ultimelor două, a doua să fie mai mare decât suma ultimelor trei, iar prima cifră să fie mai mare decât suma celorlalte.

2. Câţi ani poate avea o persoană care în 2014 are vârsta egală cu suma cifrelor anului în care s-a născut?

3. Fred Flintstone şi Barney Rubble joacă "*Pietricele*": începând cu Fred, ei scot alternativ una sau două pietricele dintr-un sac care conţine 50 de pietricele, fiind declarat învingător cel care reuşeste să golească sacul. Cum trebuie să joace Fred pentru a fi sigur că iese învingător?

4. Un număr se numeşte *norocos* dacă se divide cu 13.
a) Aflaţi cel mai mic număr norocos cu suma cifrelor 27.
b) Există numere norocoase cu suma cifrelor 2014?

Subiect propus de conf.dr.Dorel Miheţ şi asist.dr.Claudia Zaharia

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu", ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a VI-a

1. Câte numere $\overline{abc}$ au proprietatea că $a+b+c$ divide 2014?

2. Spunem că un triunghi este ,,*aproape dreptunghic*" dacă măsura cel puţin unuia dintre unghiurile sale diferă de $90°$ cu cel mult $15°$.
Spunem despre un triunghi că este ,,*aproape isoscel*" dacă are două unghiuri ale căror măsuri diferă prin cel mult $15°$.
a) Este adevărat că orice triunghi ascuţitunghic este ,,*aproape dreptunghic*" sau ,,*aproape isoscel*"?
b) Desenaţi un triunghi care să nu fie nici ,,*aproape dreptunghic*", nici ,,*aproape isoscel*".

3. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele P, Q şi R, S astfel încât

$$m(\angle BCP) = m(\angle PCQ) = m(\angle QCA) \text{ şi}$$
$$m(\angle CBR) = m(\angle RBS) = m(\angle SBA).$$

Notăm cu U intersecţia dreptelor BS şi CQ, iar cu V intersecţia dreptelor BR şi CP.
Demonstraţi că dacă $UV \perp BC$, atunci:
a) UV este mediatoarea segmentului $[BC]$,
b) $[AU$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

4. Stabiliţi dacă există numere de 10 cifre, diferite două câte două, care au proprietatea că oricum am şterge 6 dintre cifrele numărului, numărul de 4 cifre care rămâne este compus.

Subiect propus de lect.dr. Andrei Eckstein

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 ş 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a VII-a

1. a) Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul n^4+n^2+1 este prim.
b) Demonstraţi că numărul

$$A=\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)...(100^4+100^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(99^4+99^2+1)}$$

este natural.

2. Se consideră mulţimea A a tuturor tripletelor de numere naturale (x,y,z) cu proprietatea că x, y, z, $x+y-z$, $z+x-y$, $y+z-x$, $x+y+z$ sunt 7 numere prime distincte, iar $x+y=800$ (un exemplu de astfel de triplet este $(13,787,797)$).
Pentru fiecare $(x,y,z)\in A$ se face diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre cele 7 numere prime. Care este cea mai mare valoare pe care o poate avea această diferenţă?

3. Demonstraţi că diagonalele unui trapez sunt perpendiculare dacă şi numai dacă segmentul care uneşte mijloacele bazelor are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

4. Se ştie că M şi N sunt respectiv mijloacele laturilor $[DC]$ şi $[BC]$ ale rombului $ABCD$, iar $m(\widehat{MAN})=\frac{1}{2}m(\widehat{BAD})$.
a) Aflaţi $m(\widehat{ABC})$.
b) Demonstraţi că pentru orice puncte $U\in[DC], V\in[BC]$ astfel încât $BV=CU$ are loc egalitatea

$$m(\widehat{UAV})=\frac{1}{2}m(\widehat{BAD}).$$

Subiect propus de conf.dr.Dorel Miheţ şi asist.dr.Claudia Zaharia

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a VIII-a

1. Numerele reale pozitive a şi b verifică egalitatea $a^{22} + b^{22} = a^3 + b^3$. Arătaţi că

$$a^{2014} + b^{2014} \geq a^{2013} + b^{2013}.$$

2. (a) Fie $ABCD$ un tetraedru şi M, N mijloacele muchiilor $(BC), (AD)$. Verificaţi că are loc *identitatea lui Euler*:

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + 4MN^2.$$

(b) Tetraedrul $ABCD$ are muchiile opuse congruente ($AB = CD, AC = BD$, $AD = BC$). Arătaţi că feţele tetraedrului sunt triunghiuri ascuţitunghice.

3. (a) Arătaţi că pentru orice numere reale a, b, c, t are loc egalitatea

$$(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc.$$

(b) Numerele reale distincte $m, n, p > 0$ verifică egalitatea $mn + np + pm = 1$. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} m + \dfrac{yz}{x} = n + \dfrac{zx}{y} = p + \dfrac{xy}{z} \\ xyz + mnp = m + n + p. \end{cases}$$

4. Fie un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$ şi $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$. Arătaţi că $AB = CD$.

Subiect propus de lect.dr. Ioan Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş | Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a V-a

1. Aflaţi cel mai mare număr de cinci cifre astfel încât cea de-a patra cifră să fie mai mare decât cea de-a cincea, a treia să fie mai mare decât suma ultimelor două, a doua să fie mai mare decât suma ultimelor trei, iar prima cifră să fie mai mare decât suma celorlalte.

Olimpiadă Rusia

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
Fie $\overline{abcde}$ numărul căutat. Dacă $e \geq 1$, atunci $b \geq 2$, $c \geq 4$, $b \geq 8$, iar $a \geq 16$ - nu e cifră. Rezultă $e = 0$. .... **(3p)**
Pentru a avea un număr cât mai mare trebuie ca $a = 9$, deci $b + c + d = 8$. ... **(2p)**
Alegem d şi c cele mai mici posibile cu proprietăţile cerute, aşadar $d = 1$, $c = 2$ şi $b = 5$. .... **(4p)**

2. Câţi ani are o persoană care în 2014 are vârsta egală cu suma cifrelor anului în care s-a născut?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
Fie $\overline{abcd}$ anul naşterii persoanei respective. Atunci $a \in \{1, 2\}$ şi $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2014$. .... **(2p)**
Dacă $a = 1$ rezultă că $1014 = \overline{bcd} + 1 + b + c + d \leq 28$, deci $\overline{bcd} \geq 986$. Astfel, $b = 9$ şi $\overline{cd} \geq 86$.
Pentru $c = 8$ obţinem $d = 8$, deci persoana este născută în 1988, în 2014 având 26 de ani. .... **(3p)**
Dacă $c = 9$, atunci $2d = 5$ - nu convine. .... **(1p)**

Dacă $a = 2$, rezultă $b = 0$ şi $(10c + d) + c + d + 2 = 14$, adică $11c + 2d = 12$, de unde obţinem $c = 0$, $d = 6$.

În acest caz, persoana este născută în 2006, iar în 2014 are 8 ani. .... **(3p)**

3. Fred Flintstone şi Barney Rubble joacă "*Pietricele*": începând cu Fred, ei scot alternativ una sau două pietricele dintr-un sac care conţine 50 de pietricele, fiind declarat învingător cel care reuşeste să golească sacul.

Cum trebuie să joace Fred pentru a fi sigur că iese învingător?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Folosim metoda mersului invers. Pentru a câştiga, Fred trebuie să-i lase la sfârşit lui Barney 3 pietricele. .... **(3p)**

Pentru aceasta, înainte ar trebui să-i lase 6 pietricele, iar înainte de 6, 9 pietricele, etc.

Putem figura numărul de pietricele pe care Fred trebuie să le lase în sac pentru a fi sigur că iese învingător astfel:

$$48 \leftarrow 45 \leftarrow 42 \leftarrow 39 \leftarrow 36 \leftarrow 33 \leftarrow ... \leftarrow 12 \leftarrow 9 \leftarrow 3.$$

Constatăm că Fred poate realiza acest lucru dacă ia de la început 2 pietricele, iar apoi completează de fiecare dată la un multiplu de 3 numărul pietrelor scoase de Barney (dacă Barney scoate o pietricică, Fred scoate 2, iar dacă Barney scoate 1, Fred scoate 2). **(6p)**

4. Un număr se numeşte *norocos* dacă se divide cu 13.

a) Aflaţi cel mai mic număr norocos cu suma cifrelor 27.

b) Există numere norocoase cu suma cifrelor 2014?

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 27 este 999, dar 999 nu este norocos. Următoarele numere cu suma 27 sunt sunt 1899, 1989,. . ..

Deoarece 1989 se divide cu 13 ($1989 = 153 \cdot 13$), el este cel mai mic număr norocos cu suma cifrelor 27. .... **(4p)**

b) Cum 1001 se divide cu 13, rezultă că 10011001...1001 (1007 grupe de 1001) se divide cu 13 .... **(5p)**

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”, ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a VI-a

Soluţii şi barem:

1. Câte numere $\overline{abc}$ au proprietatea că $a+b+c$ divide 2014?

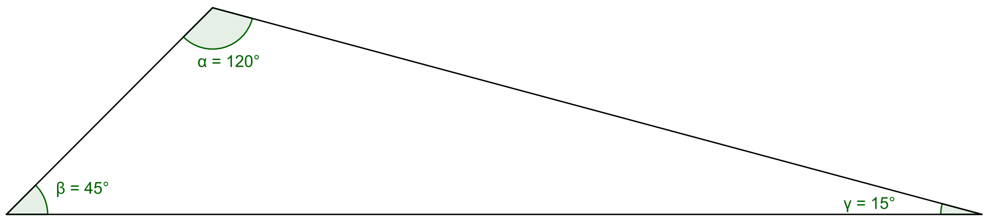
Soluţie
Start **1p**
Deoarece $a+b+c \leq 9+9+9=27$, iar singurii divizori ai lui $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ care sunt mai mici sau egali cu 27 sunt 1, 2 şi 19, rezultă că $a+b+c \in \{1,2,19\}$........................ **3p**
Cu $a+b+c=1$ există un singur număr, 100.. **1p**
Cu $a+b+c=2$ există 3 numere: 101, 110 şi 200. .... **1p**
Cu $a+b+c=19$ avem: dacă $a=9$, b poate fi $1,2,\ldots 9$ (avem $\overline{abc} \in \{919, 928, 937, \ldots, 991\}$), deci avem 9 variante; dacă $a=8$, atunci $\overline{abc} \in \{829, 837, 846, \ldots, 892\}$, adică 8 variante; în general, pentru orice $a \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ vom avea a variante, deci în total, în acest caz, vor fi $0+1+2+\ldots+9=45$ de numere care au proprietatea din enunţ......................... **3p**
În concluzie, în total sunt $1+3+45=49$ de numere $\overline{abc}$ pentru care $a+b+c \mid 2014$...... **1p**

2. Spunem că un triunghi este ,,*aproape dreptunghic*” dacă măsura cel puţin unuia dintre unghiurile sale diferă de 90° cu cel mult 15°.
Spunem despre un triunghi că este ,,*aproape isoscel*” dacă are două unghiuri ale căror măsuri diferă prin cel mult 15°.
a) Este adevărat că orice triunghi ascuţitunghic este ,,*aproape dreptunghic*” sau ,,*aproape isoscel*”?
b) Desenaţi un triunghi care să nu fie nici ,,*aproape dreptunghic*”, nici ,,*aproape isoscel*”.

Turneul Oraşelor

Soluţie
Start **1p**
a) Fie $x \leq y \leq z$ măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic......................... **1p**
Dacă $75 \leq z < 90$, triunghiul este ,,aproape dreptunghic”.. **1p**
În caz contrar, $z < 75$. Dacă $y \geq 60$, atunci $0 \leq z-y < 15$, deci triunghiul este ,,aproape isoscel”.. **2p**
Dacă $y < 60$ şi $z < 75$, atunci $x = 180-y-z > 180-60-75 = 45$, deci $0 \leq y-x < 60-45 = 15$, prin urmare şi în acest caz triunghiul este ,,aproape isoscel”............................. **2p**
În concluzie, orice triunghi ascuţitunghic este ,,aproape dreptunghic” sau ,,aproape isoscel”.

b) Conform punctului **a)**, triunghiul trebuie să fie obtuzunghic. Trebuie ca măsura unghiului obtuz să fie mai mare ca $105°$, iar unghiurile să difere prin mai mult de $15°$. De exemplu, un triunghi cu unghiurile de măsuri $120°$, $45°$, $15°$ nu este nici ,,aproape dreptunghic", nici ,,aproape isoscel". (Sunt multe alte alegeri posibile ale măsurilor unghiurilor pentru ca triunghiul să nu fie nici ,,aproape dreptunghic", nici ,,aproape isoscel".)
Pentru orice desen corect **3p**



Remarcă: Această problemă arată de ce, în practică, atunci când încercăm să desenăm un triunghi ascuţitunghic oarecare, ni se pare mereu că acesta ne-a ,,ieşit" ,,aproape dreptunghic" sau ,,aproape isoscel".

3. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele P, Q şi R, S astfel încât

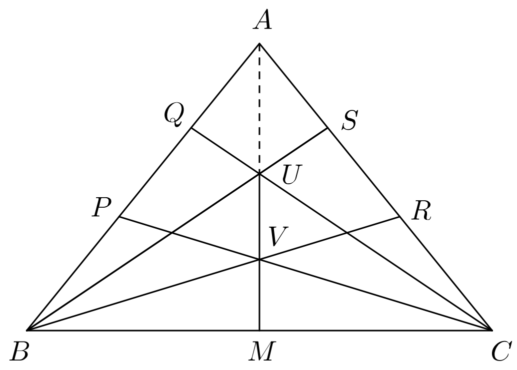
$$m(\angle BCP) = m(\angle PCQ) = m(\angle QCA) \text{ şi}$$

$$m(\angle CBR) = m(\angle RBS) = m(\angle SBA).$$

Notăm cu U intersecţia dreptelor BS şi CQ, iar cu V intersecţia dreptelor BR şi CP.
Demonstraţi că dacă $UV \perp BC$, atunci:
a) UV este mediatoarea segmentului $[BC]$,
b) $[AU$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

Dorel Miheţ

Soluţie
Start **1p**
a) Notăm cu M intersecţia drepelor UV şi BC. Observăm că V este punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor B şi C ale triunghiului BCU, deci $[UV$ este bisectoarea unghiului U (deoarece, într-un triunghi, bisectoarele sunt concurente). **2p**
Atunci triunghiurile BUM şi CUM sunt congruente (CU), deci $BM = CM$ (sau, folosind proprietăţile triunghiurilor isoscele: fiind bisectoare şi înălţime, (UM) este şi mediană) **2p**
b) Din congruenţa de triunghiuri demonstrată mai sus deducem că $BU = CU$ şi $\angle UBM \equiv \angle UCM$. Rezultă de aici că $m(\angle VBM) = \frac{1}{2}m(\angle UBM) = \frac{1}{2}m(\angle UCM) = m(\angle VCM)$, deci şi $m(\angle ABU) = m(\angle ACU)$. **2p**
Rezultă că triunghiurile ABU şi ACU sunt congruente (LUL), deci $\angle BAU \equiv \angle CAU$, adică $(AU$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$ **2p**



4. Stabiliţi dacă există numere de 10 cifre, diferite două câte două, care au proprietatea că oricum am şterge 6 dintre cifrele numărului, numărul de 4 cifre care rămâne este compus.

Soluţie
Start **1p**
Da, există. Să alegem un număr ale cărui ultime 6 cifre să fie (indiferent în ce ordine) $0, 2, 4, 6, 8, 5$.. **3p**
În afara cazului în care ştergem chiar ultimele şase cifre, numărul rămas va avea drept ultimă cifră una din cifrele alese mai sus, deci va fi fie un număr divizibil cu 2 (şi mai mare ca 2), fie un număr divizibil cu 5 (şi mai mare ca 5), deci un număr compus........................ **2p**
Primele 4 cifre ale numărului, $1, 3, 7, 9$, vor trebui aranjate astfel încât în cazul rămas, acela în care cele 6 cifre şterse sunt chiar ultimele 6, numărul de 4 cifre obţinut să fie şi el compus. Şi aici sunt multe variante. Vom indica doar două: 1379 (căci $1379 = 7 \cdot 197$ este număr compus) şi 1397 (se vede din criteriul de divizibilitate cu 11 că este număr compus).

În concluzie, există numere cu proprietatea din enunţ, de exemplu numărul 1379024685.... **4p**

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a VII-a

1. a) Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul n^4+n^2+1 este prim.
b) Demonstraţi că numărul

$$A=\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)...(100^4+100^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(99^4+99^2+1)}$$

este natural.

Olimpiadă Brazilia

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
a) $n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$ este prim dacă şi numai dacă $n^2-n+1=1$ sau $n^2+n+1=1$. Rezultă $n\in\{-1,0,1\}$; convine doar $n=1$. **(4p)**
b) $A=\dfrac{(2^2-2+1)(2^2+2+1)\cdot\ldots\cdot(100^2-100+1)(100^2+100+1)}{(1^2-1+1)(1^2+1+1)\cdot\ldots\cdot(99^2-99+1)(99^2+99+1)}$ .... **(1p)**
Dar $(2k)^2-2k+1=(2k-1)^2+(2k-1)+1$, $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$ .... **(2p)**
Rezultă că $A=\dfrac{100^2+100+1}{1^2-1+1}=10101\in\mathbb{N}$ .... **(2p)**

2. Se consideră mulţimea A a tuturor tripletelor de numere naturale (x,y,z) cu proprietatea că x, y, z, $x+y-z$, $z+x-y$, $y+z-x$, $x+y+z$ sunt 7 numere prime distincte, iar $x+y=800$ (un exemplu de astfel de triplet este $(13,787,797)$).

Pentru fiecare $(x,y,z)\in A$ se face diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre cele 7 numere prime. Care este cea mai mare valoare pe care o poate avea această diferenţă?

Olimpiadă Rusia (enunţ adaptat)

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Se verifică imediat că dacă $(x, y, z) \in A$, atunci x, y, z sunt impare, deci cel mai mic dintre cele 7 numere este cel puţin 3. .... **(2p)**

Cel mai mare număr este $x+y+z = 800+z$. Ştim de asemenea că $x+y-z = 800-z$ este prim impar, deci $800 - z \geq 3$, adică $z \leq 797$. .... **(3p)**

Prin urmare $x+y+z \leq 1597$, de unde deducem că diferenţa poate fi cel mult $1597-3 = 1594$. .... **(2p)**

Pentru tripletul dat în exemplul din enunţ cele 7 numere sunt 13, 787, 797, 3, 23, 1571, 1597. Diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr este 1594, în consecinţă, aceasta este valoarea maximă căutată. .... **(2p)**

3. Demonstraţi că diagonalele unui trapez sunt perpendiculare dacă şi numai dacă segmentul care uneşte mijloacele bazelor are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Considerăm că $AB||CD$. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Atunci $MNPQ$ este paralelogram, cu $MN \parallel AC$ şi $MQ \parallel BD$. **(3p)**

Diagonala $[QN]$ a acestui paralelogram are lungimea $\frac{AB+CD}{2}$. .... **(1p)**

$MNPQ$ este dreptunghi dacă şi numai dacă are diagonalele congruente, adică dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ .... **(3p)**

Rezultă că $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ .... **(2p)**

Variantă

Ducem prin C paralela la DB. Fie E intersecţia acestei paralele cu AB. ...... **(1p)**

Fie $F \in AB$ astfel încât $MF = PC$. Atunci $MPCF$ este paralelogram, deci $MP = CF$. .... **(2p)**

Cum $AF = AM + MF = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AE}{2}$, rezultă că CF este mediană în triunghiul ACE. .... **(3p)**

$\triangle ACE$ este dreptunghic dacă şi numai dacă $CF = \frac{AE}{2}$ .... **(2p)**

Prin urmare, $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ .... **(1p)**

4. Se ştie că M şi N sunt respectiv mijloacele laturilor $[DC]$ şi $[BC]$ ale rombului $ABCD$, iar $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAD})$.

a) Aflaţi $m(\widehat{ABC})$.

b) Demonstraţi că pentru orice puncte $U \in [DC], V \in [BC]$ astfel încât $BV = CU$ are loc egalitatea

$$m(\widehat{UAV}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAD}).$$

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start. . . . . **(1p)**

a) $\triangle ADM \equiv \triangle ABN$ (LUL), deci $\widehat{DAM} \equiv \widehat{BAN}$. . . . . **(1p)**

Deoarece $[AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, rezultă că $[AC$ este şi bisectoarea unghiului $\widehat{MAN}$. . . . . **(1p)**

Notând $\alpha = m(\widehat{CAM})$ şi $\beta = m(\widehat{DAM})$, din ipoteză rezultă că $2\alpha + 2\beta = 4\alpha$, deci $[AN]$ este bisectoare şi mediană în $\triangle BAC$. Rezultă că $AB = AC$, deci triunghiul ABC este echilateral.

Prin urmare $m(\widehat{ABC}) = 60°$. . . . . **(3p)**

b) Trebuie să arătăm că dacă $ABCD$ este romb cu $m(\widehat{BAD}) = 120°$, iar $U \in [DC], V \in [BC]$ sunt astfel încât $BV = CU$, atunci $m(\widehat{UAV}) = 60°$.

Din $BV = CU$ şi $\triangle DAC$ echilateral rezultă $\triangle ADU \equiv \triangle ACV$ (LUL), deci $m(\widehat{DAU}) = m(\widehat{CAV})$. . . . . **(2p)**

Deducem că $\widehat{UAV} \equiv \widehat{DAC}$, deci $m(\widehat{UAV}) = 60°$. . . . . **(2p)**

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

BAREM

Clasa a VIII-a

1. Start 1p
Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$ şi inegalitatea din problemă este verificată 1p
Dacă $a > 1$, atunci din $a^3(a-1)(a^{18} + \ldots + a + 1) = b^3(1-b)(b^{18} + \ldots + b + 1)$
rezultă $b < 1$ şi de aici $a > b$ (cazul $a < 1$ se va trata analog) 1p
Din egalitatea precedentă rezultă şi

$$\frac{a^3(a-1)}{b^3(1-b)} = \frac{b^{18} + \ldots + b + 1}{a^{18} + \ldots + a + 1}$$ ... 2p

Inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent

$$\frac{a^{2014} - a^{2013}}{b^{2013} - b^{2014}} = \frac{a^{2010}}{b^{2010}} \cdot \frac{a^3(a-1)}{b^3(1-b)} \geq 1$$ ... 2p

Aceasta este echivalentă cu

$$a^{2010}(b^{18} + \ldots + b + 1) \geq b^{2010}(a^{18} + \ldots + a + 1)$$ ... 1p

care se obţine prin însumarea unor inegalităţi evidente de forma $a^n b^m \geq a^m b^n$ cu $n > m$, care sunt adevărate fiind echivalente cu $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} \geq 1$ şi ţinând cont de $a > b$ 2p

2. Start 1p
Se verifică cu teorema medianei identitatea din (a) 3p
Din ipoteză rezultă că feţele tetraedrului sunt triunghiuri congruente, deci este suficient să verificăm afirmaţia pentru una dintre feţele tetraedrului 1p
Vom arăta, de exemplu, că $\widehat{BAC}$ este ascuţit; din teorema cosinusului este suficient să arătăm că $2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2 > 0$ 2p
Din identitatea lui Euler şi congruenţa muchiilor opuse în tetraedru rezultă

$$0 < 4MN^2 = AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 - (BC^2 + AD^2) = 2(AB^2 + AC^2 - BC^2),$$

(M şi N nu pot coincide deoarece $M = N$ ar conduce la coplanaritatea punctelor A, B, C, D); obţinem concluzia 3p
Soluţie alternativă pentru (b)
Se consideră mijlocul M al lui (BC). Din inegalitatea triunghiului $MA + MD >$

$AD = BC = 2MC$ 2p
Avem însă $MA = MD$ (din congruenţa triunghiurilor ABC şi DCB) 1p
Se obţine $MD > MC$ 1p
Rezultă că MD este strict mai mare decât raza cercului de diametru $[BC]$ din planul (BCD), astfel că M este situat în exteriorul acestui cerc, ceea ce conduce la concluzia că unghiul $\widehat{BDC}$ este ascuţit 2p

3. Start 1p
Se verifică prin calcul direct (a) 1p
Avem egalităţile $\dfrac{yz}{x} = k - m, \dfrac{zx}{y} = k - n, \dfrac{xy}{z} = k - p$, unde s-a notat cu k valoarea comună a expresiilor $m + \dfrac{yz}{x}, n + \dfrac{zx}{y}, p + \dfrac{xy}{z}$ 2p
Atunci $xyz = (m + n + p) - mnp = \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} = (k - m)(k - n)(k - p)$ ... 2p
Rezultă $k^3 - (m+n+p)k^2 + (mn+np+pm)k - mnp = (m+n+p) - mnp$, de unde rezultă, utilizând ipoteza $mn+np+pm = 1$, că avem $(k^2+1)(k-(m+n+p)) = 0$, ceea ce conduce la $k = m + n + p$ 2p
Obţinem $\dfrac{yz}{x} = n + p, \dfrac{zx}{y} = p + m, \dfrac{xy}{z} = m + n$, de unde, prin înmulţirea două câte două a acestor egalităţi şi ţinând cont de faptul că printre numerele x, y, z nu pot fi exact unul sau exact trei negative, rezultă soluţiile:
$(x = \sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = \sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = \sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = -\sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = -\sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = \sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = -\sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = \sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = -\sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = \sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = -\sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = -\sqrt{(n+p)(p+m)})$. 2p

4. Start 1p
Notăm pentru simplificare $BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, BD = e, CD = f$. Din ipoteză şi teorema cosinusului rezultă egalităţile

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + f^2 - d^2}{2bf};\ \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2ce} = \frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef} \quad \text{... 2p}$$

sau echivalent

$$f(b^2+c^2-a^2) - c(b^2+f^2-d^2) = 0;\ f(c^2+e^2-d^2) - c(e^2+f^2-a^2) = 0 \quad \text{... 1p}$$

Prin adunarea acestor două egalităţi şi factorizare rezultă

$$(c - f)(a^2 + d^2 + 2cf - b^2 - e^2) = 0 \quad \text{... 2p}$$

Presupunem că avem $a^2 + d^2 + 2cf - b^2 - e^2 = 0$; dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $(BC), (AD), (AC)$ din relaţia lui Euler obţinem $b^2 + e^2 + c^2 + f^2 = a^2 + d^2 + 4MN^2$, ceea ce împreună cu egalitatea anterioară conduce la $MN = \frac{c+f}{2}$ 2p
Aceasta conduce la contradicţie, pentru că triunghiul MNP ar fi degenerat ($MP = \frac{c}{2}, NP = \frac{f}{2}$ din linii mijlocii). Rezultă concluzia $c = f$ 2p