Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi neisoscel, cu laturile $a > b > c$, G centrul său de greutate, iar I centrul cercului său înscris. Dacă $M \in GI \cap BC$, $N \in GI \cap CA$, iar $P \in GI \cap AB$, determinaţi rapoartele
a) $\frac{BM}{MC}$, $\frac{CN}{NA}$, $\frac{AP}{PB}$;
b) $\frac{MN}{MP}$.

2. Fie 2015 numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2015} \in [3, 21]$. Arătaţi că

$$\frac{8x_1 - 21}{x_2^2} + \frac{8x_2 - 21}{x_3^2} + \ldots + \frac{8x_{2014} - 21}{x_{2015}^2} + \frac{8x_{2015} - 21}{x_1^2} \geq \frac{2015}{3}.$$

3. a) Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $(a+b)^n - nab^{n-1} - b^n$ este divizibil prin a^2.
b) Determinaţi ultimele patru cifre ale numărului 2103^{2015}.

4. La o masă rotundă sunt aşezate n persoane. Fiecare dintre acestea fie spune întotdeauna adevărul, fie minte întotdeauna. Toate persoanele din jurul mesei fac afirmaţia că exact unul dintre cei doi vecini ai săi este mincinos. Determinaţi câte dintre cele n persoane ar putea să fie mincinoşi, dacă
a) $n = 2015$;
b) $n = 2016$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a X-a

1. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor

$$C_{2016}^{1}, C_{2016}^{3}, \ldots, C_{2016}^{2015}.$$

2. (a) O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *strict convexă* dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ distincte şi orice $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Există o funcţie strict convexă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pe al cărei grafic se pot găsi patru puncte care sunt vârfurile unui paralelogram? Justificaţi răspunsul.
(b) Se consideră într-un plan patru puncte (distincte) A, B, C, D. Să se determine

$$\max_{X \in [CD]} XA + XB.$$

3. Fie $P_1 P_2 \ldots P_{14}$ un poligon regulat cu 14 laturi. Să se arate că dreptele P_1P_3, P_5P_{11} şi P_6P_9 sunt concurente.

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pentru care

$$f(f(m+1) + 3) = m$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a XI-a

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 = 2015\, A$. Arătaţi că

$$Tr(A) = 2015\ rang(A).$$

2. Determinaţi toate funcţiile surjective $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ care verifică relaţia

$$x + f(f(x)) = 2f(x),\ (\forall)\ x \in [0, \infty).$$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^t = A$. Arătaţi că pentru fiecare $\alpha \in (-2, 2)$, matricea

$$A(\alpha) = A^2 + \alpha A + I_n$$

este inversabilă.

4. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Arătaţi că $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$ dacă şi numai dacă pentru orice mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ este tot o mulţime mărginită, unde $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$.

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a XII-a

1. Fie $f : [-2;2] \to \mathbb{R}$, continuă şi derivabilă.
Arătaţi că $(\exists) t_0 \in [-2;2]$ astfel încât $f'(t_0) - f^2(t_0) < 1$.

2. Găsiţi soluţiile complexe ale ecuaţiei $(x^2 - 2x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x - 1) - 1 = x$.

3. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} \sin^n(\frac{1}{t}) & , \text{ dacă } t \neq 0 \\ 0 & , \text{ dacă } t = 0 \end{cases}$
Arătaţi că f_n este primitivabilă dacă şi numai dacă n este impar.

4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care nu are neapărat element unitate.

a.) Fie $a \in A$ astfel încât $(\exists) b \in A$ cu $a = aba$. Arătaţi că $(\exists) c \in A$ cu $a = aca$ şi $c = cac$. Un inel care are această proprietate pentru $(\forall) a \in A$ se numeşte inel regulat în sens von Neumann.

b.) Arătaţi că dacă A este regulat în sens von Neumann, atunci şi $C(A)$ este regulat în sens von Neumann, unde $C(A) = \{a \in A | ax = xa, (\forall) x \in A\}$.

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi neisoscel, cu laturile $a > b > c$, G centrul său de greutate, iar I centrul cercului său înscris. Dacă $M \in GI \cap BC$, $N \in GI \cap CA$, iar $P \in GI \cap AB$, determinaţi rapoartele
a) $\frac{BM}{MC}$, $\frac{CN}{NA}$, $\frac{AP}{PB}$;
b) $\frac{MN}{MP}$.

Soluţie:

a) Avem $\overrightarrow{r}_G = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C\right)$ şi $\overrightarrow{r}_I = \frac{a\overrightarrow{r}_A + b\overrightarrow{r}_B + c\overrightarrow{r}_C}{a+b+c}$.
Un punct X aparţine unei drepte YZ dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{r}_X = \alpha\overrightarrow{r}_Y + (1-\alpha)\overrightarrow{r}_Z$. **1p**
$M \in GI$ şi $M \in BC$ revine la existenţa lui α şi β astfel ca $\alpha\overrightarrow{r}_G + (1-\alpha)\overrightarrow{r}_I = \beta\overrightarrow{r}_B + (1-\beta)\overrightarrow{r}_C$. Alegând originea în A, condiţia precedentă revine la $\alpha\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right) = \beta\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AC}$.
1p
Cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ nu sunt coliniari, obţinem $\frac{\alpha}{3} + \frac{(1-\alpha)b}{a+b+c} = \beta$ şi $\frac{\alpha}{3} + \frac{(1-\alpha)c}{a+b+c} = 1-\beta$. De aici rezultă $\alpha = \frac{3a}{2a-b-c}$, apoi $\beta = \frac{a-b}{2a-b-c}$. Rezultă că $\frac{BM}{MC} = \frac{a-c}{a-b}$. **2p**
Analog, $\frac{CN}{NA} = \frac{a-b}{b-c}$, $\frac{AP}{PB} = \frac{c-b}{c-a}$. **1p**
b) Din teorema lui Menelaus rezultă că $\frac{MN}{MP} = \frac{|(b-a)(2c-a-b)|}{|(c-a)(2b-c-a)|}$. **2p**

2. Fie 2015 numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2015} \in [3, 21]$. Arătaţi că

$$\frac{8x_1 - 21}{x_2^2} + \frac{8x_2 - 21}{x_3^2} + \ldots + \frac{8x_{2014} - 21}{x_{2015}^2} + \frac{8x_{2015} - 21}{x_1^2} \geq \frac{2015}{3}.$$

Soluţie:
Condiţia $x_i \in [3, 21]$ este echivalentă cu $(x_i - 3)(x_i - 21) \leq 0$, adică $x_i^2 - 24x_i + 63 \leq 0$, deci cu $8x_i - 21 \geq \frac{x_i^2}{3}$.
3p
Folosind aceste inegalităţi şi apoi inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică, avem $\frac{8x_1-21}{x_2^2} + \frac{8x_2-21}{x_3^2} + \ldots + \frac{8x_{2014}-21}{x_{2015}^2} + \frac{8x_{2015}-21}{x_1^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + \ldots + \frac{x_{2015}^2}{x_1^2}\right) \geq \frac{2015}{3}$. **4p**
Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2015} \in \{3, 21\}$.

3. a) Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $(a+b)^n - nab^{n-1} - b^n$ este divizibil prin a^2.
b) Determinaţi ultimele patru cifre ale numărului 2103^{2015}.

Soluţie:
a) Afirmaţia se poate demonstra prin inducţie, folosind că
$(a+b)^{n+1} - (n+1)ab^n - b^n - (a+b)\left[(a+b)^n - nab^{n-1} - b^n\right] = -na^2b^{n-1}$ este divizibil cu a^2. .... **2p**
b) Deoarece $\varphi(5^4) = 500$, rezultă $3^{2015} \equiv 3^{15} \pmod{5^4}$.
Deoarece $\varphi(2^4) = 8$, rezultă $3^{2015} \equiv 3^7 \pmod{2^4}$.
Atunci, cu Teorema Chinezească a Resturilor rezultă $3^{2015} \equiv 8907 \pmod{10^4}$. **3p**
Pe de altă parte, $3^{2014} \equiv 69 \pmod{10^2}$, de unde, folosind că $(21 \cdot 100 + 3)^{2015} \equiv 2015 \cdot 2100 \cdot 3^{2014} + 3^{2015}$ (mod 10^4), rezultă $2103^{2015} \equiv 2407 \pmod{10^4}$. **2p**

4. La o masă rotundă sunt aşezate n persoane. Fiecare dintre acestea fie spune întotdeauna adevărul, fie minte întotdeauna. Toate persoanele din jurul mesei fac afirmaţia că exact unul dintre cei doi vecini ai săi este mincinos. Determinaţi câte dintre cele n persoane ar putea să fie mincinoşi, dacă

a) $n = 2015$;

b) $n = 2016$.

Soluţie:

Dacă toate persoanele de la masă sunt mincinoşi, condiţiile sunt îndeplinite, deci o variantă posibilă (atât în cazul $n = 2015$ cât şi în cazul $n = 2016$) este ca în jurul mesei să stea n mincinoşi. **2p**

Dacă există măcar o persoană care spune adevărul, vecinii acestuia trebuie să fie un mincinos şi un cinstit. De aici putem determina felul de a fi al fiecărei persoane de la masă: se obţin grupuri de forma ,,cinstit-mincinos-cinstit". În acest caz, la masă sunt $\frac{n}{3}$ mincinoşi, câte unul în fiecare grup. **3p**

Această situaţie este însă posibilă dacă şi numai dacă n este multiplu de 3, prin urmare răspunsul este: dacă $n = 2015$, la masă pot sta 2015 mincinoşi (singura variantă); dacă $n = 2016$, la masă pot sta fie 2016 mincinoşi, fie 672 mincinoşi. **2p**

Inspectoratul şcolar judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a X-a

1. Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor

$$C_{2016}^1, C_{2016}^3, \ldots, C_{2016}^{2015}.$$

Barem de corectare:

observă că suma numerelor este 2^{2015}, deci cmmdc este de forma $d = 2^k$	2p
şi cum $C_{2016}^1 = 2016 = 2^{32} \cdot 63$ rezultă că $k \leq 5$	2p
dar $2016 \cdot C_{2015}^{2m} = (2m+1) \cdot C_{2016}^{2m+1}$ rezultă că $k = 5$, deci $d = 32$	3p
total	**7p**

2. (a) O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *strict convexă* dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ distincte şi orice $t \in (0,1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Există o funcţie strict convexă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pe al cărei grafic se pot găsi patru puncte care sunt vârfurile unui paralelogram? Justificaţi răspunsul.
(b) Se consideră într-un plan patru puncte (distincte) A, B, C, D. Să se determine

$$\max_{X \in [CD]} XA + XB.$$

Barem de corectare:

a) consideră un paralelogram $ABCD$ care ar avea vârfurile pe graficul unei funcţii strict convexe	
dacă pentru abscise, $x_A = min(x_A, x_B, x_C, x_D)$,	
din $x_A + x_C = x_B + x_D$ rezultă că $x_C = max(x_A, x_B, x_C, x_D)$	2p
dar atunci din convexitatea strictă rezcă $y_B + y_D < y_A + y_C$, contradicţie	1p
b) din inegalitatea normelor deduce că funcţia $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,	
$f(t) = XA + XB (X = (1-t)C + tD)$ este convexă,	
astfel că valoarea maximă se tinge pentru unul din capetele intervalului	2p
astfel obţinem $max(AC + BC, AD + BD)$	2p
total	**7p**

3. Fie $P_1 P_2 \ldots P_{14}$ un poligon regulat cu 14 laturi. Să se arate că dreptele $P_1 P_3$, $P_5 P_{11}$ şi $P_6 P_9$ sunt concurente.

Barem de corectare:

consideră afixele punctelor P_k de forma $P_k(z^{k-1})$,	
unde z este o rădăcină primitivă de ordinul 14 a unităţii	1p
pentru puncte A, B, C, D cu afixele de modul 1,	
obţine că afixul punctului de intersecţie al dreptelor AB şi CD este $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$	3p
determină afixul punctului de intersecţie al lui P_1P_3 cu P_5P_{11}: $w_1 = \frac{1+z^2-z^6-z^{12}}{1-z^2}$	1p
determină afixul punctului de intersecţie al lui P_1P_3 cu P_6P_9: $w_2 = \frac{1+z^2-z^8-z^{11}}{1-z^3}$	1p
folosind $z^7 = -1$, arată că $w_1 = w_2$, de unde rezultă concluzia	1p
total	**7p**

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pentru care

$$f(f(m+1)+3) = m$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.

Barem de corectare:

arată că f este bijectivă	2p
obţine că $f(k+2) = f(k) + 2, (\forall)k \in \mathbb{Z}$	1p
deduce că $f(2k) = f(0) + 2k$, $f(2k+1) = f(1) + 2k$, $(\forall)k \in \mathbb{Z}$ şi $2 \not| (f(0) - f(1))$	1p
dacă $2\|f(1)$ oţine $0 = f(f(1)+3) = 2f(1) + 2$, de unde $f(1) = -1$, absurd	1p
dacă $2\|f(0)$ obţine că $f(0) + f(1) = -3$	1p
verifică că condiţia precedentă este şi suficientă	1p
total	**7p**

Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXIX-a
Reşiţa, 20-22 martie 2015

clasa a XI-a

Problema 1.

Notează $rang(A) = r$ şi descompune $A = BC$, unde $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ cu $rang(B) = rang(C) = r$ .... **(2p)**

Rescrie relaţia din ipoteză sub forma $BCBC = B(2015I_r)C$ şi deduce relaţia $(B^tB)(CB)(CC^t) = (B^tB)(2015I_r)(CC^t)$ (♣) .... **(2p)**

Din $rang(B^tB) = rang(B) = r$, respectiv $rang(CC^t) = rang(C) = r$, deduce $B^tB, CC^t \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversabile şi rescrie (♣) sub forma $CB = 2015I_r$ .... **(2p)**

Obţine $Tr(A) = Tr(BC) = Tr(CB) = Tr(2015I_r) = 2015\ r = 2015\ rang(A)$ .. **(1p)**

Problema 2.

Arată că f este injectivă, ceea ce implică f bijectivă. Utilizând relaţia din ipoteză deduce că $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ verifică

$$f^{-1}(f^{-1}(y)) + y = 2f^{-1}(y),\ (\forall)y \in [0,\infty),$$

adică exact aceeaşi relaţie verificată de f .... **(1p)**

Notează $f^{(n)} := f \circ f \circ \cdots \circ f$, iterata de ordinul $n \in \mathbb{N}$, unde $f^{(0)}(x) := x$, $(\forall)x \in [0,\infty)$ şi obţine recurenţa

$$f^{(n-1)}(x) + f^{(n+1)}(x) = 2f^{(n)}(x), \quad (\forall)x \in [0,\infty),\ (\forall)n \geq 1$$

.... **(1p)**

Deduce $f^{(n+1)}(x) - f^{(n)}(x) = f(x) - x$, $\quad (\forall)x \in [0,\infty)$, $(\forall)n \geq 0$ şi obţine relaţia $f^{(n)}(x) = f(x) + (n-1)[f(x) - x]$, $\quad (\forall)x \in [0,\infty)$, $(\forall)n \geq 1$ (♠) .... **(1p)**

Obţine $f(x) \geq x, (\forall)x \in [0,\infty)$ (♦) astfel: presupune că $(\exists)x_0 \in [0,\infty)$ pentru care $f(x_0) < x_0$ şi deduce din relaţia (♠) că $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = -\infty$, în contradicţie cu $f^{(n)}(x_0) \geq 0, (\forall)n \in \mathbb{N}$ .... **(2p)**

Aplicând procedeul anterior, de această dată funcţiei f^{-1}, deduce $f^{-1}(y) \geq y, (\forall)y \in [0,\infty)$ şi obţine $x \geq f(x), (\forall)x \in [0,\infty)$ (♦♦)

Din relaţiile (♦) şi (♦♦), obţine $f(x) = x, (\forall)x \in [0,\infty)$, funcţie care evident verifică relaţia din ipoteză .... **(2p)**

Problema 3.

Pentru o matrice arbitrară $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notăm $\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(M - \lambda I_n) = 0\}$. Pentru o matrice arbitrară $Z = [z_{ij}]_{1\le i\le m;1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, notăm cu $\overline{Z} = [\overline{z_{ij}}]_{1\le i\le m;1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ matricea complex conjugată.

Fie $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{C} \Rightarrow (\exists)X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq (0,\dots,0)^t$ astfel încât $AX = \lambda X \Rightarrow X^tA^t = \lambda X^t \Rightarrow \overline{X}^t A^t = \overline{\lambda}\,\overline{X}^t \Rightarrow \overline{X}^t A^t X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^t X \Rightarrow \overline{X}^t AX = \overline{\lambda}\,\overline{X}^t X$ (♠) .... **(2p)**

Obţine $\overline{X}^t X \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ prin calcul direct şi respectiv $\overline{X}^t AX \in \mathbb{R}$ deoarece $A^t = A$ şi astfel $\overline{\overline{X}^t AX} = X^t A\overline{X} = (X^tA\overline{X})^t = \overline{X}^t A^t X = \overline{X}^t AX$ .... **(2p)**

Din relaţia (♠) deduce $\overline{\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ şi concluzionează că $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .... **(1p)**

$A(\alpha)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(\alpha)) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(A(\alpha)) = \{\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ **(1p)**

Presupune că $(\exists)\alpha_0 \in (-2,2)$ astfel încât $0 \in \sigma(A(\alpha_0)) \Rightarrow (\exists)\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda^2 + \alpha_0\lambda + 1 = 0$, în contradicţie cu $\Delta = \alpha_0^2 - 4 < 0$ .... **(1p)**

Problema 4.

" $\Rightarrow$ " Consideră $A \subset \mathbb{R}$ mărginită şi presupune $f^{-1}(A)$ nemărginită. Deduce că există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(A)$ cu $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ .... **(1p)**

Din $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$, deduce $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nemărginit, în contradicţie cu faptul că $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ .... **(2p)**

" $\Leftarrow$ " Negând $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$, deduce $(\exists)\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $(\exists)x_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x_n| > n$ şi $|f(x_n)| \le \varepsilon_0$ .... **(2p)**

Deduce că mulţimea $f^{-1}([-\varepsilon_0, \varepsilon_0])$ este nemărginită, în contradicţie cu ipoteza. **(2p)**

1.) Problemă

Fie $f : [-2; 2] \to \mathbb{R}$, continuă.

Arătaţi că $(\exists)t_0 \in [-2; 2]$ astfel încât $f'(t_0) - f^2(t_0) < 1$.

Soluţie

Presupuneţi prin reducere la absurd că $f'(t) - f^2(t) \geq 1, \forall t \in [-2; 2]$ 1pct

Rescrieţi inegalitatea ca $\frac{f'(t)}{1+f^2(t)} \geq 1$ 2 pct

Integrăţi de la -2 la 2 şi obţineţi $\arctan(f(2)) - \arctan(f(-2)) \geq 4$ 2pct

Absurd, căci $\arctan(x) - \arctan(y) \leq \pi, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$ 2pct

2.) Problemă

Găsiţi soluţiile complexe ale ecuaţiei $(x^2-2x-1)^2-2(x^2-2x-1)-1 = x$.

Soluţie

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 1$

Observăm că dacă $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = x$, 2 pct

Găsim soluţiile ecuaţiei $f(x) = x$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ şi $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, orice polinom avand puncte fixe in $\mathbb{C}$ 2pct

Scrieţi$(x^2 - 2x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x - 1) - 1 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 7x + 2 = 0$ cu soluţiile

$x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ şi $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ şi determinăm celelalte 2 rădăcini 3pct

3.) Problemă

Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} \sin^n(\frac{1}{t}) & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases}$

Arătaţi că f_n este primitivabilă dacă şi numai dacă n este impar.

Soluţie

Fie $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_n(t) = \begin{cases} n\sin^{n-1}(\frac{1}{t}) - (n+1)sin^{n+1}\frac{1}{t} & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} n\sin^{n-1}(\frac{1}{t})\cos^2(\frac{1}{t}) - \sin^{n+1}(\frac{1}{t}) & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases}$$ 2pct

Fie $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$G_n(t) = \begin{cases} t^2\sin^n(\frac{1}{t})\cos(\frac{1}{t}) & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases}$$ 2pct

Arătaţi că G e derivabilă şi

$$G_n'(t) = \begin{cases} 2t\sin^n(\frac{1}{t})\cos(\frac{1}{t}) & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases} - g_n(t)$$

unde $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u_n(t) = \begin{cases} 2t\sin^n(\frac{1}{t})\cos(\frac{1}{t}) & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases}$$

e continuă.

Deci g_n e primitivabilă. 1 pct

Demonstraţi prin inducţie enunţul. (1pct pentru fiecare din cazurile n par, respectiv impar)

4.) <u>Porblemă</u>

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care nu are neapărat element unitate.

a.) Fie $a \in A$ astfel încât $(\exists)b \in A$ cu $a = aba$. Arătaţi că $(\exists)c \in A$ cu $a = aca$ şi $c = cac$. Un inel care are această proprietate pentru $(\forall)a \in A$ se numeşte inel <u>regulat în sens von Neumann</u>.

b.) Arătaţi că dacă A este regulat în sens von Neumann, atunci şi $C(A)$ este regulat în sens von Neumann, unde $C(A) = \{a \in A | ax = xa, (\forall)x \in A\}$.

<u>Soluţie</u>

i.) Găsiţi că $c = bab$ 1 pct

Verificare 1 pct

ii.) Fie $a \in C(a)$ şi $x \in A$

Cu notaţiile de la i.) aveţi

$a = aba = a^2b$, $c = cac$ şi $a = aca$.

Arătăţi că $c \in C(A)$ 2pct

$xba - bax \overset{a \in C(A)}{=} xba - bxa = xba - bxaba = xba - abaxb = xba - axb =$
$xba - xba = 0$ 2pct

$cx - xc = babx - xbab = babx - baxb = b(abx - axb) =$
$b(bax - xba) = b0 = 0$ 1pct