Universitatea de Vest din Timişoara — Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul ”Traian Lalescu” Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a V-a

1. Fie a, b şi c cifre nenule nu neapărat distincte. Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural $\overline{abc}$ cu proprietatea că media aritmetică a numerelor $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ şi $\overline{cba}$ are cifra unităţilor 5.

2. Conform legendei şahului, înţeleptul care a inventat jocul de şah i-a cerut împăratului Indiei drept răsplată un bob de grâu pentru primul pătrat al tablei, două pentru al doilea, patru pentru al treilea, ..., 2^{63} pentru ultimul pătrat al tablei. Constatând că hambarele Indiei nu vor avea nici în 100 de ani atât grâu, sfetnicii împăratului l-au rugat pe înţelept să-şi schimbe cererea.
Acesta a cerut atunci ca în fiecare pătrat al tablei să fie scris un număr natural, iar el să primească atâţi elefanţi, cât este suma tuturor numerelor scrise pe tablă. Care este numărul minim de elefanţi în fiecare din următoarele cazuri:
a) dacă toate numerele de pe tablă trebuie să fie diferite?
b) dacă pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a tablei numerele trebuie să fie diferite?
c) dacă numerele scrise în oricare două pătrate vecine(două pătrate se consideră vecine dacă au o latură comună) trebuie să fie diferite?

3. Spunem că un an este *foarte par* dacă în scrierea sa apar patru cifre şi toate aceste cifre sunt pare (spre exemplu, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008 sunt foarte pari, iar 2010 nu este foarte par.)
a) Determinaţi cea mai mare distanţă posibilă între doi ani foarte pari succesivi şi daţi exemplu de pereche de ani pentru care această distanţă poate fi obţinută.
b) Este uşor de observat că distanţa minimă între doi ani foarte pari succesivi este 2. Care este a doua cea mai mică distanţă posibilă între doi ani foarte pari succesivi? Justificaţi şi găsiţi un exemplu.

4. Alin, Bogdan şi Cosmin joacă un turneu de tenis de masă. La fiecare partidă iau parte doi jucători, în timp ce al treilea se odihneşte. În partida următoare, cel care s-a odihnit până atunci joacă împotriva câştigătorului (nu există jocuri finalizate cu egalitate). La finalul turneului se constată că Alin a jucat în total 10 partide, Bogdan a jucat 17 şi Cosmin 15 partide.
a) Câte partide s-au disputat în total?
b) Cine a pierdut a doua partidă?

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Enunţuri

Clasa a VI-a

Subiectul 1 În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{C}$ se intersectează într-un punct M situat pe mediatoarea laturii (AC). Ştiind că $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Subiectul 2 **a)** Arătaţi că împărţind un număr prim la 30, restul este întotdeauna fie 1, fie un număr prim.
b) Daţi exemplu de un număr prim al cărui rest la împărţirea la 60 nu este nici 1, nici număr prim.

Subiectul 3 Spunem că o mulţime A de numere naturale este *biconvexă* dacă pentru orice $x \in A$ cel puţin unul dintre numerele $x - 1$, $x + 1$ aparţine lui A. Astfel, mulţimea $A = \{2016, 2017, 2018\}$ este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în A: $2016 + 1 \in A$, $2017 - 1 \in A$, $2018 - 1 \in A$. În schimb, mulţimea $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ nu este biconvexă, deoarece elementul $4 \in B$ este izolat în B: $4 - 1 \notin B$ şi $4 + 1 \notin B$.
a) Câte submulţimi biconvexe de 4 elemente are mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$?
b) Câte submulţimi biconvexe de 18 elemente are mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$?

Subiectul 4 Alina şi Bogdan joacă următorul joc. La început, pe tablă este scris numărul $\dfrac{2015}{2017}$. O mutare constă din înlocuirea numărului $\dfrac{m}{n}$ scris pe tablă $(m, n \in \mathbb{N},\ n > 1)$ cu unul dintre numerele $\dfrac{m-1}{n}$ sau $\dfrac{m}{n-1}$. Cei doi jucători mută alternativ. Prima mutare o face Alina. Cine obţine primul pe tablă un număr natural, câştigă.
a) Arătaţi că jocul se termină după cel mult 4030 de mutări.
b) Demonstraţi că, dacă ambii jucători joacă bine, Bogdan poate întotdeauna câştiga. Cum trebuie să joace Bogdan pentru a câştiga?

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a VII -a

1. Spunem că o mulţime A de numere naturale este biconvexă dacă pentru orice $x \in A$ cel puţin unul dintre numerele $x-1$, $x+1$ aparţine lui A. Astfel, mulţimea $A = \{2016, 2017, 2018\}$ este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în A: $2016+1 \in A$, $2017-1 \in A$, $2018-1 \in A$. În schimb, mulţimea $B = \{1,2,4,6,7\}$ nu este biconvexă, deoarece elementul $4 \in B$ este izolat în B: $4-1 \notin B$ şi $4+1 \notin B$.

a) Scrieţi toate submulţimile biconvexe de 4 elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

b) Câte submulţimi biconvexe de 3 elemente are mulţimea $\{1,2,3,...,2016\}$?

c) Câte submulţimi biconvexe de 4 elemente are mulţimea $\{1,2,3,...,2016\}$?

2. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AD \perp AB$ şi $BC \perp AB$, în care $AB = AD + BC$. Fie M mijlocul lui $[DC]$, iar X un punct variabil pe latura $[AB]$.

Demonstraţi că:

a) $\triangle AMB$ este dreptunghic isoscel;

b) $m(\angle CXD) = 90^\circ$ dacă şi numai dacă $AX = BC$ sau $AX = AD$.

3. Se dă triunghiul ABC. Pe paralela prin B la AC se consideră punctul D astfel încât D şi A sunt de aceeaşi parte a dreptei BC şi $BD = AB$, iar pe paralela prin C la AB se consideră punctul E astfel încât E şi A sunt de aceeaşi parte a dreptei BC şi $CE = AC$. Dacă $CD \bigcap AB = \{Q\}, BE \bigcap AC = \{R\}$, $CD \bigcap BE = \{P\}$, iar L este piciorul bisectoarei din A a triunghiului ABC, demonstraţi că:

a) $AQLR$ este romb;

b) $\mathcal{A}_{AQPR} = \mathcal{A}_{PBC}$. ($\mathcal{A}_{AQPR}$ înseamnă aria patrulaterului $AQPR$)

4. Fie $\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \ x + \frac{1}{4} \geq 0\right\}$. Un calculator a fost programat astfel încât, pentru orice număr x ales din mulţimea $\mathcal{M}$, să calculeze succesiv numerele

$$E_0 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}, E_1 = x + \sqrt{E_0}, E_2 = x + \sqrt{E_1}, E_3 = x + \sqrt{E_2}, ..., E_{10} = x + \sqrt{E_9}$$

şi să afişeze pe ecran numerele $a = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ şi $b = \sqrt{E_{10}}$. Demonstraţi că:

a) Dacă $x = r^2 + r$, unde r este un număr raţional cu $r + \frac{1}{2} < 0$, atunci cele două numere afişate sunt numere raţionale.

b) Numărul $a - b$ este raţional, pentru orice $x \in \mathcal{M}$.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Enunţuri

Clasa a VIII -a

1. Pentru orice număr real x se notează $E(x) = 2x - 1$.

a) Arătaţi că dacă $x, y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ şi $x + y = 3$, atunci $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$.

b) Determinaţi mulţimea valorilor lui $M > 0$ astfel încât inegalitatea

$$10E^2(x) - 60E(x) + 89 < 0$$

să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|x - 2| < M$.

2. Considerăm mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătaţi că dacă $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ atunci $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ dacă şi numai dacă $a = c$ şi $b = d$.

b) Determinaţi patru elemente ale mulţimii $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este infinită.

3. Fie $a > 0$. Dintre toate piramidele triunghiulare regulate cu muchiile laterale de lungime egale cu ”a”, arătaţi că există una de volum maxim. Determinaţi această pramidă şi volumul maxim.

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $BD' = \sqrt{3}$, fie M şi N mijloacele muchiilor $[B'C']$, respectiv $[C'D']$.

a) Dacă $MN \cap A'D' = \{T\}$ determinaţi raportul în care punctul de intersecţie al dreptei AT cu dreapta CD' împarte muchia $[CD']$.

b) Determinaţi perimetrul poligonului obţinut prin secţionarea cubului cu planul (AMN).

c) Arătaţi că oricum am alege 217 puncte în interiorul cubului, există două la o distanţă unul faţă de celălalt mai mică de $\frac{1}{3}$.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a V-a

Subiectul 1

Start 1p

$\dfrac{\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}}{6}=37(a+b+c)$ 3p

$37(a+b+c)$ are ultima cifră 5 dacă şi numai dacă suma $a+b+c$ are ultima cifră 5 .... 1p

Cum a, b, c sunt cifre nenule, rezultă că $a+b+c\in\{5,15,25\}$ 1p

Cel mai mic ņumăr ce satisface condiţiile problemei se obţine pentru $a+b+c=5$ şi este 113 ... 2p

Cel mai mare număr ce satisface condiţiile problemei se obţine pentru $a+b+c=25$ şi este 997 2p

Subiectul 2

Start 1p

a) Numărul minim de elefanţi se obţine dacă pe tablă sunt scrise cele mai mici 64 de numere naturale, astfel că acest număr minim va fi $0+1+2+\ldots+62+63=2016$ 3p

b) Numărul minim se obţine dacă pe fiecare linie şi fiecare coloană apar cele mai mici 8 numere naturale 1p

Există o configuraţie(de ex. restul împărţirii lui $i+j$ prin 8 pe linia i şi coloana j) cu această proprietate 1p

Numărul elefanţilor va fi $8\times(0+1+\ldots+7)=224$ 1p

c) Numărul minim se obţine dacă sunt folosite doar cele mai mici două numere naturale 1p

Există o configuraţie(de ex. alb$=0$, negru$=1$) cu această proprietate, ... 1p

Numărul minim este 32 .... 1p

Subiectul 3

Start 1p

a) Dacă între anii foarte pari succesivi $A=\overline{abcd}$ şi $B=\overline{efgh}$ ($A<B$, a, b, c, d, e, f, g, h cifre pare) există o diferenţă de ordinul miilor, atunci $e\geq a+2$ 1p

Rezultă deci că toţi anii dintre $\overline{(a+1)000}$ şi $\overline{(a+1)999}$, care nu sunt foarte pari, vor fi cuprinşi între A şi B 1p

Cel mai mare an foarte par mai mic decât $\overline{(a+1)000}$ este $\overline{a888}$ şi cel mai mic an foarte par mai mare decât $\overline{(a+1)999}$ este $\overline{(a+2)000}$. 1p

Cum între A şi B nu pot exista alţi ani foarte pari, rezultă $A = \overline{a888}$ şi $B = \overline{(a+2)000}$, deci diferenţa maximă este 1112 .... 1p

Găsirea unui exemplu de ani cu proprietatea cerută (e.g. 2888 şi 4000) 1p

b) Fie A un an foarte par. Dacă ultima cifră a lui A este 0,2,4 sau 6, prin adunarea lui 2 se obţine de asemenea un an foarte par. Prin urmare, pentru a găsi ani foarte pari succesivi la distanţă mai mare ca 2, cel mai mic dintre ei trebuie să aibă ultima cifră 8 .... 2p

Dacă ultima cifră a lui A este 8 şi îi adunăm 4, 6, 8 sau 10, vom obţine un an care are cifra zecilor impară. Aşadar, cea mai mică diferenţă posibilă mai mare ca 2 este ≥ 12 .... 1p

Găsirea unui exemplu de ani foarte pari succesivi având diferenţa 12 (e.g. 2008 şi 2020) 1p

Subiectul 4

Start 1p

a) Numărul partidelor disputate este $\dfrac{10+15+17}{2} = 21$ 3p

b) Niciun jucător nu se poate odihni 2 sau mai multe partide consecutiv, deci numărul partidelor pe care le poate sta deoparte este cel mult 11 .... 3p

Cum Alin joacă doar 10 partide, rezultă că el a stat deoparte în partidele 1, 3, 5, 7, ..., 19, 21 .. 2p

Deoarece nu participă la a treia partidă, Alin a pierdut-o pe cea de-a doua 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

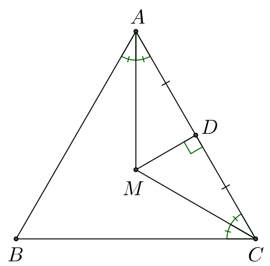
Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a VI-a

Subiectul 1 În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{C}$ se intersectează într-un punct M situat pe mediatoarea laturii (AC). Ştiind că $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

GM nr. 4/1995, pb. E:10920, enunţ modificat



Start 1p
Fie D mijlocul laturii (AC). Triunghiurile AMD şi CMD sunt congruente LUL ((MD) este latură comună, unghiurile $\widehat{ADM}$ şi $\widehat{CDM}$ sunt drepte, iar $AD = CD$). Deducem că $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MCD}$. 3p
Notând cu α măsurile acestor unghiuri, rezultă că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$. Cum suma măsurilor unghiurilor triunghiului AMC este $180°$, deducem că
$m(\widehat{AMC}) = 180° - 2\alpha$. 3p
Condiţia $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ revine atunci la $180° - 2\alpha = 4\alpha$, deci la $6\alpha = 180°$. Rezultă că $\alpha = 30°$, deci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 60°$. În fine, suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC fiind $180°$, deducem că $m(\widehat{ABC}) = 60°$. 3p

Subiectul 2 a) Arătaţi că împărţind un număr prim la 30, restul este întotdeauna fie 1, fie un număr prim.
b) Daţi exemplu de un număr prim al cărui rest la împărţirea la 60 nu este nici 1, nici număr prim.

Olimpiadă Cuba, 2010

Start 1p
a) Să presupunem că s-ar putea obţine un rest diferit de 1 şi de orice număr prim, un rest r din mulţimea $\{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28\}$. Dar toate aceste numere sunt divizibile cu 2, 3 sau 5 (şi diferite de 2, 3 şi 5), deci şi $n = 30q + r$ ar fi divizibil cu 2, 3 sau 5 (şi diferit de acestea), prin urmare n n-ar fi prim. 5p
b) Împărţindu-l pe 109 (despre care se verifică că este prim) la 60 obţinem restul 49 care nu este prim. 4p

Subiectul 3 Spunem că o mulţime A de numere naturale este *biconvexă* dacă pentru orice $x \in A$ cel puţin unul dintre numerele $x-1$, $x+1$ aparţine lui A. Astfel, mulţimea $A = \{2016, 2017, 2018\}$ este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în A: $2016 + 1 \in A$, $2017 - 1 \in A$, $2018 - 1 \in A$. În schimb, mulţimea $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ nu este biconvexă, deoarece elementul $4 \in B$ este izolat în B: $4-1 \notin B$ şi $4+1 \notin B$.
a) Câte submulţimi biconvexe de 4 elemente are mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$?
b) Câte submulţimi biconvexe de 18 elemente are mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$?

Olimpiadă Franţa, prelucrare

Start 1p
a) Dacă a este cel mai mic element al unei submulţimi biconvexe A, iar b este cel mai mare, trebuie ca $a + 1,\ b - 1 \in A$. Prin urmare submulţimile biconvexe de 4 elemente sunt de forma $\{a,\ a+1,\ b-1,\ b\}$, cu $b-1 > a+1$. Numărăm submulţimile biconvexe după cel mai mic element al lor:
- submulţimile în care cel mai mic element este 1 sunt: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$, ... , $\{1, 2, 19, 20\}$, aşadar sunt 17 submulţimi;
- submulţimile în care cel mai mic element este 2 sunt: $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$, ... , $\{2, 3, 19, 20\}$, aşadar sunt 16 submulţimi;
- în general, pentru un anumit a fixat, b poate fi orice număr de la $a + 3$ până la 20, deci sunt $18 - a$ submulţimi biconvexe care îl au pe a drept cel mai mic element.
- pentru $a = 17$ avem o singură submulţime biconvexă de 4 elemente, şi anume $\{17, 18, 19, 20\}$.

În concluzie, sunt $17 + 16 + \ldots + 1 = \dfrac{17 \cdot 18}{2} = 153$ de submulţimi biconvexe cu 4 elemente. 3p
b) Trebuie să scoatem două elemente din mulţimea M astfel încât submulţimea rămasă să fie biconvexă.
Numerele 1 şi 20 au un singur vecin: 2 şi 19. Dacă scoatem numărul 2, pentru ca mulţimea să rămână biconvexă trebuie ca celălalt element scos să fie 1 (altfel 1 ar rămâne izolat), iar dacă scoatem numărul 19, atunci trebuie să-l scoatem şi pe 20.
.... 1p
Dacă cel mai mic element scos este 1, atunci al doilea poate fi oricare, în afară de 3 şi 19 deci se obţin 17 submulţimi biconvexe de 18 elemente.
Cel mai mic element scos nu poate fi 2, căci atunci 1 ar rămâne în mulţime şi ar fi izolat.
Dacă cel mai mic element scos este 3, atunci al doilea poate fi oricare mai mare în afară de 5 şi 19; sunt aşadar 15 asemenea submulţimi.

Dacă cel mai mic element scos este 4, atunci al doilea poate fi oricare element mai mare ca 4, în afară de 6 şi 19, deci sunt 14 asemenea submulţimi.
În general, dacă cel mai mic element scos este $a \in \{3, 4, \ldots, 16\}$, al doilea nu are voie să fie $a+2$ (ar rămâne $a+1$ izolat) şi nici 19 (ar rămâne 20 izolat), deci sunt $18-a$ submulţimi. 2p
Dacă cel mai mic element scos este 17, celălalt nu poate fi 19 (ar rămâne şi 18 şi 20 izolate), deci în acest caz sunt 2 submulţimi. 1p
Dacă cel mai mic element scos este 18, al doilea nu poate fi nici 19 (ar rămâne 20 izolat), nici 20 (ar rămâne 19 izolat), deci în acest caz nu avem nicio submulţime.
.... 1p
În fine, putem elimina numerele 19 şi 20 (o submulţime).
În total, sunt $17+0+15+14+13+\ldots+4+3+2+2+0+1 = 18+\dfrac{15 \cdot 16}{2} = 138$.
.... 1p

Subiectul 4 Alina şi Bogdan joacă următorul joc. La început, pe tablă este scrisă fracţia $\dfrac{2015}{2017}$. O mutare constă din înlocuirea fracţiei $\dfrac{m}{n}$ scrise pe tablă ($m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) cu una dintre fracţiile $\dfrac{m-1}{n}$ sau $\dfrac{m}{n-1}$. Cei doi jucători mută alternativ. Prima mutare o face Alina. Cine obţine primul pe tablă un număr natural, câştigă.
a) Arătaţi că jocul se termină după cel mult 4030 de mutări.
b) Demonstraţi că, dacă ambii jucători joacă bine, Bogdan poate întotdeauna câştiga. Cum trebuie să joace Bogdan pentru a câştiga?

Andrei Eckstein

Start 1p
a) Observăm că la fiecare mutare suma dintre numărător şi numitor scade cu 1,
.... 2p
deci după 4030 de mutări (dacă jocul nu s-a terminat până atunci) această sumă va fi 2, deci numărul de pe tablă va fi $\dfrac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$ sau $\dfrac{0}{2} = 0 \in \mathbb{N}$, adică jocul se termină. 1p
b) Strategia lui Bogdan: dacă numărătorul fracţiei de pe tablă nu este egal cu 1, el micşorează mereu numitorul. În caz contrar, el micşorează numărătorul făcând fracţia să fie egală cu 0 şi astfel câştigând. Dacă Alina micşorează la vreo mutare a ei tot numitorul, Bogdan poate scrie pe tablă o fracţie echiunitară, deci câştigă. Dacă Alina diminuează mereu numărătorul, iar Bogdan numitorul, se ajunge ca pe tablă să fie scris numărul $\dfrac{1}{4}$, moment în care Bogdan urmează la mutare şi câştigă.
.... 6p

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a VII -a

Subiectul 1

Start 1p

a) Enumerăm submulţimile biconvexe de 4 elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$ după cel mai mic element al lor:

-submulţimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 1: $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\{1,2,5,6\}$;

-submulţimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 2: $\{2,3,4,5\}$ şi $\{2,3,5,6\}$;

-submulţimile biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 3: $\{3,4,5,6\}$. **2p**

b) O mulţime biconvexă X de trei elemente este formată din numere consecutive: dacă x este cel mai mic element al lui X, atunci $x+1 \in A$ ($x-1 \notin A$, deoarece $x-1 < x$), iar dacă y este cel mai mare element al lui X, atunci $y-1 \in X$, şi cum X are trei elemente, trebuie ca $y-1 = x+1$, deci $X = \{x, x+1, x+2\}$. **2p**
Aşadar submulţimile biconvexe de trei elemente ale mulţimii $\{1,2,3,...,2016\}$ sunt: $\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},...,\{2014,2015,2016\}$, iar numărul lor este 2014. .... **2p**

c) Procedând ca la b) deducem că mulţimile biconvexe de patru elemente sunt de forma $\{x, x+1, y, y+1\}$, cu $x+1 < y$. **1p**

Luând în considerare cel mai mic element din submulţime (ca în exemplul de la a)), deducem că mulţimea $\{1,2,3,...,2016\}$ are 2013 submulţimi biconvexe de patru elemente în care cel mai mic element este 1 (submulţimile de forma $\{1,2,k,k+1\}$, unde $k \in \{3,4,...,2015\}$), 2012 submulţimi biconvexe cu cel mai mic element egal cu 2 (submulţimile de forma $\{2,3,k,k+1\}$, cu $k \in \{4,5,...,2015\}$), 2011 submulţimi biconvexe cu cel mai mic element egal cu 3, ..., o submulţime cu cel mai mic element egal cu 2013, care dau un total de $1+2+...+2013 = 2013 \cdot 1007$ submulţimi. **2p**

Subiectul 2

Start 1p

a) Fie S mijlocul laturii $[AB]$. Atunci $[MS]$ este linie mijlocie în trapez, deci $MS \perp AB$ şi

$$MS = \frac{AD+BC}{2} = SB = SA,$$

de unde deducem că $m(\angle MBA) = m(\angle MAB) = 45°$. **2p**

b) Avem de demonstrat două implicaţii:

$(\Leftarrow)$: *Dacă* $AX = BC$ *sau* $AX = AD$, *atunci* $m(\angle CXD) = 90°$.

$(\Rightarrow)$: *Dacă* $m(\angle CXD) = 90°$, *atunci* $AX = BC$ *sau* $AX = AD$.

Demonstrăm $(\Leftarrow)$:

• Dacă $AX = BC$, atunci $BX = AB - AX = (AD+BC) - BC = AD$. Rezultă că $\triangle AXD \equiv \triangle BCX$ (CC), de unde deducem că $\angle AXD \equiv \angle XCB$. Aşadar

$m(\angle AXD) + m(\angle CXB) = m(\angle XCB) + m(\angle CXB) = 90°$, deci $m(\angle CXD) = 180° - 90° = 90°$ ($\triangle CXD$ este chiar dreptunghic isoscel). **2p**

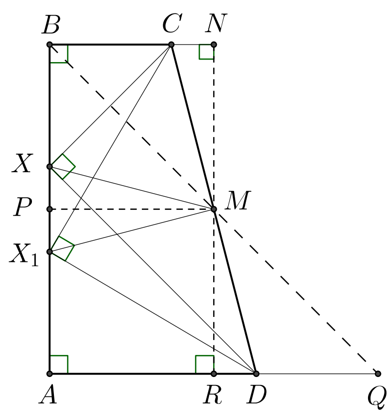
• Dacă $AX = AD$, atunci $BX = BC$, deci $\triangle AXD$ şi $\triangle BCX$ sunt triunghiuri dretunghice isoscele, de unde deducem că $m(\angle CXD) = 180° - 90° = 90°$. **2p**

Demonstrăm ($\Rightarrow$):

Observăm că $m(\angle CXD) = 90° \iff MX = \frac{CD}{2}$. **1p**

Am văzut deja că există două puncte $X \in [AB]$ cu $m(\angle CXD) = 90°$ (cele pentru care $AX \in \{BC, AD\}$). Notăm cu X şi X_1 aceste puncte, ca în figură, şi arătăm că pentru celelalte puncte P de pe $[AB]$, $MP \neq \frac{CD}{2}$.

Într-adevăr, dacă P se află între X şi X_1, atunci $MP < MX_1$ (deoarece MX_1 este mai depărtată de piciorul S al perpendicularei pe AB decât MP), şi cum $MX_1 = \frac{CD}{2}$, $MP < \frac{CD}{2}$. La fel, dacă $P(P \notin \{X, X_1\})$ nu se află între X şi X_1, atunci $MP > \frac{CD}{2}$. **2p**



Precizări la barem

Variante

a) *1.* Demonstrăm că $[BM$ şi $[AM$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle BAD$, arătând că M este egal depărtat de BC, BA şi AD.

În acest scop construim $MN \perp BC, N \in BC$, $MR \perp AD, R \in AD$ şi $MS \perp AB, S \in AB$ (S este mijlocul lui $[AB]$) şi observăm că $MS = MN = MR = \frac{AB}{2}$ (vezi soluţia de mai sus). **2p**

2. Fie $\{Q\} = BM \bigcap AD$.

Deoarece $CM = MD$, $\angle DMQ \equiv \angle BMC$ şi $\angle MDQ \equiv \angle BCM$, triunghiurile $\triangle DMQ$ şi $\triangle CMB$ sunt congruente (ULU), deci $DQ = BC$. **1p**

Ţinând seama de ipoteza $AB = AD + BC$ deducem că $AB = AQ$. Aşadar $\triangle BAQ$ este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle ABM) = 45°$. Analog se arată că $m(\angle BAM) = 45°$. **1p**

b) *1.* (*pentru implicaţia* ($\Rightarrow$))

$m(\angle CXD) = 90° \Longrightarrow MX = \frac{CD}{2}$, deci X se află atât pe $[AB]$ cât şi pe cercul de centru M şi rază $\frac{CD}{2}$ **2p**

Cum intersecţia dintre un cerc şi o dreaptă are cel mult două puncte, X şi X_1 sunt singurele de pe $[AB]$ din care $[CD]$ se vede sub un unghi drept. **1p**

2. Folosim teorema şi reciproca teoremei lui Pitagora.

Fie $AD = a, BC = b$, $AX = x$. Atunci $XB = a + b - x$ şi, din teorema lui Pitagora, $DX^2 = a^2 + x^2$, $CX^2 = b^2 + (a + b - x)^2$, $CD^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$ **2p**

Ţinând seama de aceste egalităţi, deducem succesiv:

$$m(\angle CXD) = 90^\circ \iff XD^2 + XC^2 = CD^2 \iff$$

$$\iff a^2 + x^2 + (a + b - x)^2 + b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2 \iff$$

$$\iff a^2 + x^2 + (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + (a + b)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - (a + b)x + ab = 0 \iff (x - a)(x - b) = 0 \iff x = a \text{ sau } x = b.$$

.... **5p**

3.

$$m(\angle CXD) = 90^\circ \iff m(\angle CXB) + m(\angle DXA) = 90^\circ \iff \angle CXB \equiv \angle XDA \iff$$

$$\iff \triangle BXC \sim \triangle ADX \iff \frac{BC}{XA} = \frac{BX}{AD} \iff AX \cdot XB = BC \cdot AD.$$

.... **3p**

Din ipoteză ştim şi că $XA + XB = BC + AD$, deci

$$(AD - BC)^2 = (AD + BC)^2 - 4AD \cdot BC = (AX + XB)^2 - 4AX \cdot XB = (AX - XB)^2,$$

adică $AX - XB = AD - BC$ sau $AX - XB = BC - AD$. **3p**

În primul caz, $AX = AD$ (adunând egalităţile $AX + XB = AD + BC$ şi $AX - XB = AD - BC$), iar în al doilea caz $AX = BC$ **1p**

Soluţii incomplete

b) Sesizarea faptului că trebuie demonstrate două implicaţii **1p**

Subiectul 3

Start 1p

a) Arătăm că laturile $[AQ]$ şi $[LR]$ sunt paralele şi congruente, iar $AQ = AR$.

Din $CE \| AB$ rezultă $\frac{AR}{RC} = \frac{AB}{CE} = \frac{AB}{AC}$, de unde obţinem $AR = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$.

În mod analog se obţine $AQ = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$, deci $AQ = AR$. **1p**

Din teorema bisectoarei, $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$, deci $\frac{BL}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} = \frac{AR}{AC}$, de unde deducem că $LR \| QA$. **2p**

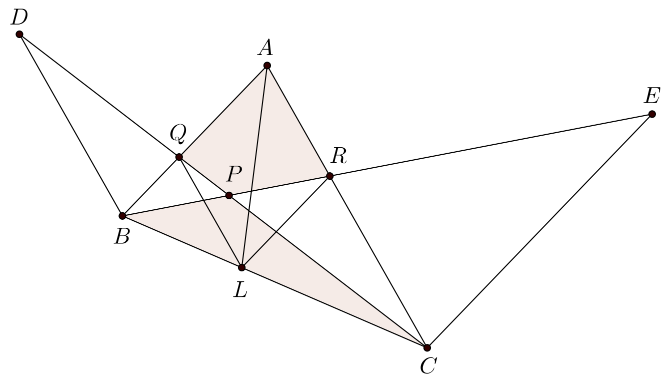
$LR \| QA \Rightarrow \angle ALR \equiv \angle BAL \equiv \angle LAR$, deci triunghiul ARL este isoscel cu $AR = LR$. Ţinând seama de egalitatea $AR = QA$, obţinem că $LR = QA$. Având două laturi opuse paralele şi congruente, $AQLR$ este paralelogram **1p**

În plus, $AQLR$ are laturile alăturate $[AQ]$, $[AR]$ congruente, deci este romb. **1p**

b) Demonstrăm că $\mathcal{A}_{BQC} = \mathcal{A}_{ABR}$. **1p**

Notând cu cu h_1 şi h_2 (respectiv) lungimile înălţimilor din C şi R ale triunghiurilor BQC şi ABR, trebuie să arătăm că $QB \cdot h_1 = AB \cdot h_2$ sau, echivalent, $\frac{QB}{AB} = \frac{h_2}{h_1}$. **1p**

Însă $\frac{h_2}{h_1} = \frac{AR}{AC} = \frac{AB}{AB + AC}$, iar din $\frac{QB}{QA} = \frac{AB}{AC}$ rezultă şi $\frac{QB}{AB} = \frac{AB}{AB + AC}$. **2p**



Precizări la barem

Variantă la b)

$\mathcal{A}_{BRL} = \mathcal{A}_{ARL}$, deoarece cele două triunghiuri au aceeaşi bază $[RL]$, iar vârfurile A şi B sunt situate pe o paralelă la RL şi analog $\mathcal{A}_{CQL} = \mathcal{A}_{AQL}$. **2p**

Prin adunare, $\mathcal{A}_{BRL} + \mathcal{A}_{CQL} = \mathcal{A}_{AQLR}$. Scăzând din ambii membri ai acestei egalităţi $\mathcal{A}_{QPL} + \mathcal{A}_{RPL}$ obţinem egalitatea cerută. **2p**

Subiectul 4

Start 1p

a) Fie $x = r^2+r$, unde $r \in \mathbb{Q}, r+\frac{1}{2} < 0$. Atunci $x+\frac{1}{4} = r^2+r+\frac{1}{4} = (r+\frac{1}{2})^2 \geq 0$, iar $a = \sqrt{x+\frac{1}{4}} = \sqrt{(r+\frac{1}{2})^2} = |r+\frac{1}{2}| = -(r+\frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}$. .... **1p**.

Rezultă că $E_0 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = r^2 + r + \frac{1}{2} - r - \frac{1}{2} = r^2$, deci $\sqrt{E_0} = \sqrt{r^2} = |r| = -r$ şi $E_1 = x + \sqrt{E_0} = r^2 + r - r = E_0$. **2p**

Apoi $E_2 = x+\sqrt{E_1} = r^2+r-r = r^2$, $E_3 = x+\sqrt{E_2} = r^2+r-r = r^2, ..., E_{10} = r^2$, deci $b = \sqrt{E_{10}} = -r \in \mathbb{Q}$. **1p**

Observaţie. Dacă $r + \frac{1}{2} \geq 0$, atunci $a = r + \frac{1}{2}$, $b = r + 1$.

b) Remarcăm că $E_0 = x + \frac{1}{4} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = (\sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2})^2$, deci

$$E_1 = x + \sqrt{E_0} = x + \left|\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right| = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = E_0.$$

.... **2p**

(Se poate folosi şi formula radicalilor compuşi: $a^2 - b = (x+\frac{1}{2})^2 - (x+\frac{1}{4}) = x^2$, deci

$$\sqrt{E_0} = \sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}+x}{2}} + \sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}-x}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

şi $E_1 = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = E_0$.)

Din $E_0 = E_1$ rezultă $E_2 = x + \sqrt{E_1} = x + \sqrt{E_0} = E_1$, şi apoi, succesiv, $E_3 = x + \sqrt{E_0} = E_0$, $E_4 = E_0$, ..., $E_{10} = E_0$. **1p**

Aşadar $\sqrt{E_{10}} = \sqrt{E_0} = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$, deci $a - b = -\frac{1}{2}$. **2p**

Precizări la barem

Variantă la a)

Se demonstrează mai întâi punctul b) şi apoi că unul din numerele a, b este raţional. **4p**

Soluţii parţiale:

a) Se demonstrează că $a \in \mathbb{Q}$ şi, ţinând seama de b), se deduce că $b \in \mathbb{Q}$, fără a demonstra b). .... **2p**$(1p + 1p)$

b) Se confirmă rezultatul în cazuri particulare. **1p**

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Subiectul 1 *Pentru orice număr real x se notează $E(x) = 2x - 1$.*

a) Arătaţi că dacă $x, y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ şi $x + y = 3$, atunci $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$.

b) Determinaţi mulţimea valorilor lui $M > 0$ astfel încât inegalitatea $10E^2(x) - 60E(x) + 89 < 0$ să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|x - 2| < M$.

Barem: Start .... **(1p)**

a) Arată că $\sqrt{E(x)} \leq x$, $\sqrt{E(y)} \leq y$ .... **(2p)**

Justifică faptul cel puţin una din inegalităţile de mai sus este strictă ..... **(1p)**

Însumează inegalităţile de mai sus şi deduce $\sqrt{E(x)} + \sqrt{E(y)} < 3$ .... **(1p)**

b) Evaluează $10E^2(x) - 60E(x) + 89 = 10\big(E(x) - 3\big)^2 - 1 = 40(x-2)^2 - 1$ **(2p)**

Deduce că inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $|x - 2| < \frac{\sqrt{10}}{20}$ ...... **(1p)**

Deduce $M \in \left(0, \frac{\sqrt{10}}{20}\right]$ .... **(2p)**

Subiectul 2 *Considerăm mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.*

a) Arătaţi că dacă $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ atunci $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ dacă şi numai dacă $a = c$ şi $b = d$.

b) Determinaţi patru elemente ale mulţimii $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este infinită.

Barem: Start .... **(1p)**

a) Din $(b - d)\sqrt{2} = c - a$ şi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, se deduce $b = d$ şi deci $a = c$ .... **(1p)**

b) Dă exemplu de patru elemente distincte (de exemplu $0, -1+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, -4+3\sqrt{2}$) pentru care verifică apartenenţa la mulţimea dată .... **(1p)**

c) Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, notând $a + b = k$ obţinem că $a + b\sqrt{2} = k + b(\sqrt{2} - 1)$. Inegalitatea $0 \leq a + b\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}$ va fi echivalentă cu $-(1+\sqrt{2})k \leq b \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} - (1+\sqrt{2})k$ .... **(2p)**

Pentru $k \in \mathbb{Z}$, alegând $b_k = 1 + \left[-(1+\sqrt{2})k\right]$ se verifică că inegalitatea anterioară este adevărată pe baza definiţie părţii întregi .... **(2p)**

Dacă $a_k = k - 1 - \left[-(1+\sqrt{2})k\right]$ atunci $z_k = a_k + b_k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ . . . . **(1p)**

Pentru $k, p \in \mathbb{Z}$, $k < p$ se arată că $b_k < b_p$ şi se deduce că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ este infinită . . . . **(2p)**

Subiectul 3 *Fie $a > 0$. Dintre toate piramidele triunghiulare regulate cu muchiile laterale de lungime egale cu "a" arătaţi că există una de volum maxim. Determinaţi această piramidă şi volumul maxim.*

Barem: Start . . . . **(1p)**

Dacă $SABC$ este o astfel de piramidă cu $SA = SB = SC = a$ atunci aceasta are acelaşi volum cu piramida $CSAB$ (de vârf C şi bază $\triangle SAB$) . . . . **(2p)**

$\mathcal{V}_{SVAB} = \dfrac{1}{6}a^2 \sin(\widehat{ASC})d(C, (SAB))$ . . . . **(1p)**

$\mathcal{V}_{CSAB}$ este maximă când $m(\widehat{ASB}) = 90°$ (deci $SA \perp SB$) . . . . **(2p)**

şi $SC \perp (SAB)$ (deci $d(C, (SAB)) = SC$) . . . . **(2p)**

Deduce că volumul maxim se obţine pentru piramida tridreptunghică ($SA \perp SB \perp SC$) regulată, iar acest volum maxim este $\dfrac{a^3}{6}$ . . . . **(2p)**

Subiectul 4 *În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $BD' = \sqrt{3}$, fie M şi N mijloacele muchiilor $[B'C']$, respectiv $[C'D']$.*

a) *Dacă $MN \cap A'D' = \{T\}$ determinaţi raportul în care punctul de intersecţie al dreptei AT cu dreapta CD' împarte muchia $[CD']$.*

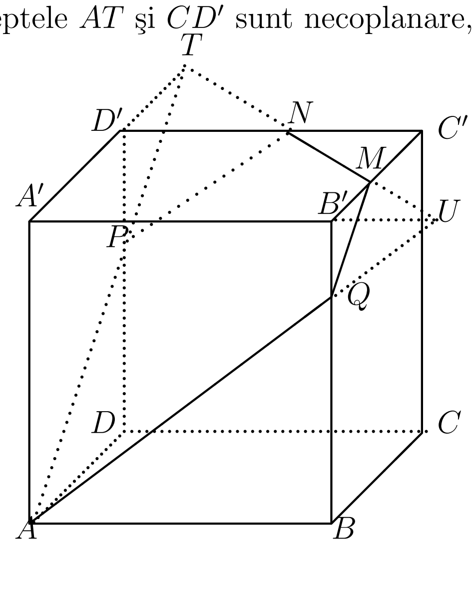
b) *Determinaţi perimetrul poligonului obţinut prin secţionarea cubului cu planul (AMN).*

c) *Arătaţi că oricum am alege 217 puncte în interiorul cubului, există două la o distanţă unul faţă de celălalt mai mică de $\dfrac{1}{3}$.*

Barem: Start . . . . **(1p)**

a) Obţine că muchia cubului este 1 . . . . **(0,5p)**

Dreptele AT şi CD' sunt necoplanare, deci nu se intersectează . . . . **(0,5p)**



b) Fie $AT \cap DD' = \{P\}$.

Din $\triangle MNC' \equiv \triangle NTD'$ (justificată) deduce $D'T = MC' = \dfrac{1}{2}$ .... (**0,5p**)

Justifică $\triangle PD'T \sim \triangle PDA$ şi deduce $\dfrac{D'P}{PD} = \dfrac{D'T}{AD} = \dfrac{1}{2}$ .... (**0,5p**)

Notăm $(AMN) = \alpha$

Cum $T \in MN \subset \alpha$ se dedce că $T \in \alpha$ şi deci $AP = AT \subset \alpha \cap (ADD')$. (**0,5p**)

Fie $U = MN \cap A'B'$. Atunci $U \in \alpha$ .... (**0,5p**)

Se deduce $AU = \alpha \cap (ABB')$. .... (**0,5p**)

Dacă $AU \cap BB' = \{Q\}$ atunci intersecţia dintre α şi feţele cubului este pentagonul $AQMNP$ .... (**1p**)

Deduce $\dfrac{B'Q}{QB} = \dfrac{1}{2}$ şi deci $BQ = \dfrac{2}{3}$ .... (**0,5p**)

Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiuri bine specificate se deduce că $AQ = AP = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$, $MQ = NP = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$, $MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .... (**1p**)

Se obţine că perimetrul pentagonului este $\sqrt{13} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .... (**1p**)

c) Descompune cubul în 216 "cubuleţe" de muchie $\dfrac{1}{6}$ cu feţele paralele cu cele ale cubului şi deduce că există cel puţin unul care să conţină două dintre aceste 217 puncte .... (**1p**)

Distanţa dintre aceste două puncte este mai mică decât diagonala "cubuleţului" ce le conţine, deci mai mică decât $\dfrac{\sqrt{3}}{6} < \dfrac{1}{3}$ .... (**1p**)

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*