Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 30$ şi

$$x_{n+2} = \text{restul împărţirii numărului } (26x_{n+1} + 3x_n) \text{ prin } 2016.$$

Arătaţi că:
a) x_n este multiplu de 3 pentru orice $n \geq 2$.
b) există două numere naturale nenule k şi p astfel încât $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$.
c) numerele k şi p satisfac condiţiile: $k \neq 1$, iar p este par.

2. Se consideră expresia $E(u, v, w) = u^4 + v^4 + w^4 - 2u^2v^2 - 2u^2w^2 - 2v^2w^2 + 4uvw(u+v+w)$, un număr real pozitiv $a > 0$ fixat şi mulţimea $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} | u^2 + v^2 + w^2 = a^2\}$. Determinaţi numărul $M = max\{E(u, v, w)|(u, v, w) \in A\}$, precum şi toate tripletele $(u, v, w) \in A$, pentru care $E(u, v, w) = M$.

3. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului său înscris, O centrul cercului său circumscris, iar $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ şi $F \in (AB)$ punctele de contact cu laturile triunghiului ale cercurilor exînscrise.
a) Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct N.
b) Arătaţi că

$$(a + b + c)\overline{PN} = (-a + b + c)\overline{PA} + (a - b + c)\overline{PB} + (a + b - c)\overline{PC}\,,$$

pentru orice punct P din planul triunghiului.
c) Arătaţi că punctele G, I şi N sunt coliniare.
d) Determinaţi distanţa dintre punctele O şi N.

4. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC se consideră picioarele înălţimilor $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ şi $C_1 \in AB$. Prin vârfurile triunghiului se duc dreptele l, m, n, astfel încât $A \in l$, $B \in m$, $C \in n$ şi $l \perp B_1C_1$, $m \perp C_1A_1$, $n \perp A_1B_1$. Arătaţi că dreptele l, m, n sunt concurente.

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a X-a

1. Fie U o mulţime nevidă de numere complexe nenule cu proprietatea că dacă $x, y \in U$, atunci $\dfrac{x}{y} \in U$.

   (a) Arătaţi că dacă $x, y \in U$, atunci $xy \in U$.

   (b) Arătaţi că dacă U are 2016 elemente, atunci U este mulţimea rădăcinilor de ordinul 2016 ale unităţii.

2. Arătaţi că dacă pentru orice punct M din planul unui patrulater convex $ABCD$ are loc inegalitatea $MA^2 + MC^2 \geq MB^2 + MD^2$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram şi $AC \geq BD$.

3. Arătaţi că:

   (a) Funcţia *cosinus hiperbolic pozitiv*, $\cosh_+ : [0, \infty) \to [1, \infty)$,

   $$\cosh_+(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in [0, \infty)$$

   este strict crescătoare, inversabilă şi că inversa acesteia este funcţia notată $\operatorname{arccosh}_+ : [1, \infty) \to [0, \infty)$,

   $$\operatorname{arccosh}_+(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right), \quad \forall y \in [1, \infty).$$

   (b) Pentru orice $y \geq 1$ avem $16y^5 - 20y^3 + 5y \geq 1$ şi are loc egalitatea

   $$5 \cdot \operatorname{arccosh}_+(y) = \operatorname{arccosh}_+\left(16y^5 - 20y^3 + 5y\right).$$

4. Fie I, J intervale şi o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte *convexă* (respectiv *concavă)* pe I dacă pentru orice $x, y \in I, x \neq y$ şi pentru orice $t \in (0, 1)$ avem $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (respectiv $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$). Dacă în definiţia de mai sus inegalităţile sunt stricte, atunci funcţia f se numeşte *strict convexă* (respectiv *strict concavă)*.

   (a) Utilizând eventual *inegalitatea lui Bernoulli*: "Pentru orice $s \geq -1$ şi pentru orice $0 < r < 1$ are loc $(1+s)^r \leq 1 + rs$, cu egalitate dacă şi numai dacă $s = 0$" arătaţi că funcţia logaritm $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este strict concavă.

   (b) Arătaţi că dacă o funcţie $f : I \to J$ este strict concavă (respectiv strict convexă), strict crescătoare şi inversabilă, atunci inversa lui f este o funcţie strict convexă (respectiv strict concavă). Demonstraţi că funcţia exponenţială e^x, respectiv funcţia $\cosh_+$ sunt strict convexe pe $\mathbb{R}$ şi respectiv pe $[0, \infty)$.

   (c) Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este strict concavă (sau strict convexă) pe I, atunci ecuaţia $f(x) = ax + b$ are cel mult două soluţii în intervalul I.

   (d) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

   $$x + \sqrt{x^2 - 1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-1}.$$

Timp de lucru: 3 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Enunţuri

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB = BA$. Să se arate că

$$\det(2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n) \geq 0.$$

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietăţile $tr(A) = tr(B) = 0$ şi $A^2 + B^2 = AB + BA$. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$. Arătaţi că

$$\det(A + B) = 2\left[\varepsilon^2 \det(A + \varepsilon B) + \varepsilon \det(A + \varepsilon^2 B)\right].$$

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

şi $x_1 = 1$. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Se consideră şirul

$$x_{n+1} = 3^{\frac{x_n}{(n+2)!}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

$$x_1 = 24.$$

(i) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(n+1)!} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} (n+1)!(x_n - 1).$$

Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a XII-a

1. a) Arătaţi că funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2+\sin x}$ admite primitive şi orice primitivă a sa este strict crescătoare.

b) Calculaţi $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel pe care definim operaţia "$*$" prin:

$$a * b = a + b - ab, \forall a, b \in A,$$

şi mulţimea $G = \left\{a \in A \;\middle|\; \exists\, x \in A : a * x = x * a = 0\right\}$.
Arătaţi că $(G, *)$ este un grup.

3. a) Demonstraţi că există o unică funcţie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$x = f(x)e^{f(x)}, \forall\, x \geq 0.$$

b) Arătaţi că f este continuă.
c) Arătaţi că f este derivabilă.

d) Calculaţi: $\int_0^e f(x)\mathrm{d}x$.

4. Pe mulţimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac\ ,\ bc + d).$$

a) Demonstraţi că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.
b) Arătaţi că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a IX-a

1. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 30$ şi*

$$x_{n+2} = \textit{restul împărţirii numărului } (26x_{n+1} + 3x_n) \textit{ prin } 2016.$$

Arătaţi că:
a) x_n este multiplu de 3 pentru orice $n \geq 2$.
b) există două numere naturale nenule k şi p astfel încât $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$.
c) numerele k şi p satisfac condiţiile: $k \neq 1$, iar p este par.
Soluţie şi barem: Start **1p**
a) arată că $3|x_3 = 753$ şi apoi că dacă $3|x_n$ şi $3|x_{n+1}$, atunci $3|x_{n+2}$, de unde rezultă proprietatea **2p**
b) deoarece $(x_n, x_{n+1}) \in \{0, 1, \ldots, 2015\} \times \{0, 1, \ldots, 2015\}$ pentru orice $n \geq 1$ şi $|\mathbb{N}| = \infty > 2016^2$, rezultă că există $k, l \in \mathbb{N}$ cu $k < l$ şi k şi l minime, astfel încât $(x_k, x_{k+1}) = (x_l, x_{l+1})$ **2p**
arată prin inducţie că pentru $p = l - k$ are loc $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$ **2p**
c) arată prin inducţie că $x_{2n} = \mathcal{M}9 + 3$ şi $x_{2n+1} = \mathcal{M}9 + 6$ pentru orice $n \geq 1$ **2p**
de unde deduce că $k \neq 1$, iar p este par. **1p**

2. *Se consideră expresia $E(u, v, w) = u^4 + v^4 + w^4 - 2u^2v^2 - 2u^2w^2 - 2v^2w^2 + 4uvw(u + v + w)$, un număr real pozitiv $a > 0$ fixat şi mulţimea $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} | u^2 + v^2 + w^2 = a^2\}$. Determinaţi numărul $M = max\{E(u, v, w) | (u, v, w) \in A\}$, precum şi toate tripletele $(u, v, w) \in A$, pentru care $E(u, v, w) = M$.*
Soluţie şi barem: Start **1p**
scrie expresia sub forma $E(u, v, w) = \left(\sum u^2\right)^2 - 2\sum(uv - uw)^2$ **3p**
astfel că $E(u, v, w) \leq (u^2 + v^2 + w^2)^2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $uv = uw = vw$ **2p**
prin urmare $M = a^4$ **2p**
şi tripletele din A pentru care se atinge maximul sunt $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(a, a, a)$ şi $(\pm a, 0, 0), (0, \pm a, 0), (0, 0, \pm a)$ **2p**

3. *Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului său înscris, O centrul cercului său circumscris, iar $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ şi $F \in (AB)$ punctele de contact cu laturile triunghiului ale cercurilor exînscrise.*
a) Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct N.
b) Arătaţi că

$$(a + b + c)\overline{PN} = (-a + b + c)\overline{PA} + (a - b + c)\overline{PB} + (a + b - c)\overline{PC}\,,$$

pentru orice punct P din planul triunghiului.
c) Arătaţi că punctele G, I şi N sunt coliniare.
d) Determinaţi distanţa dintre punctele O şi N.
Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Observă că $BD = p - c$, $CD = p - b$ şi analoagele, şi aplică reciproca teoremei lui Ceva, obţinând concurenţa cerută **2p**
b) Deoarece punctele D, E, F au coordonatele baricentrice omogene $D(0 : p - b : p - c)$, $E(p - a : 0 : p - c)$, resp. $F(p - a : p - b : 0)$, punctul N va avea coordonatele $N(p - a : p - b : p - c)$, proprietate echivalentă cu cea cerută **2p**
c) arată că $2\overline{GI} + \overline{GN} = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$ **1p**
şi deduce că punctele G, I, N sunt coliniare **1p**
d) folosind b), arată că $ON^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2$ **2p**

şi deduce, folosind inegalitatea $R \geq 2r$, că $ON = R - 2r$ **1p**

4. *Într-un triunghi ascuţitunghic ABC se consideră picioarele înălţimilor $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ şi $C_1 \in AB$. Prin vârfurile triunghiului se duc dreptele l, m, n, astfel încât $A \in l$, $B \in m$, $C \in n$ şi $l \perp B_1C_1$, $m \perp C_1A_1$, $n \perp A_1B_1$. Arătaţi că dreptele l, m, n sunt concurente.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
Consideră centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC **1p**
onservă că B_1C_1 este antiparalelă cu BC în raport cu unghiul $\widehat{BAC}$ **2p**
şi deduce că B_1C_1 este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscria **3p**
deduce că $O \in l$ **2p**
analog $O \in m$ şi $O \in n$, astfel că dreptele l, m, n sunt concurente în O. **1p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a X-a

Subiectul 1

Start 1p
(a) Din $x = y \in U$ deduce $\frac{x}{x} = 1 \in U$ 1p
Din $1, x \in U$ deduce $\frac{1}{x} = x^{-1} \in U$ 2p
Din $x, y \in U$ deduce $x, y^{-1} \in U$, apoi $\frac{x}{y^{-1}} = xy \in U$ 2p
(b) Consideră $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2016}\}$ şi $x_k \in U$ arbitrar; afirmă că $x_k x_1, x_k x_2, \ldots, x_k x_{2016}$ sunt distincte şi elemente ale lui U, de unde deduce $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2016}\} = \{x_k x_1, x_k x_2, \ldots, x_k x_{2016}\}$ 2p
Face produsul elementelor lui U în cele două moduri obţine $x_k^{2016} = 1$; finalizează 2p
Observaţie. Punctul (b) se poate aborda şi direct, independent de punctul (a), scriind $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2016}\} = \left\{\frac{x_1}{x_k}, \frac{x_2}{x_k}, \ldots, \frac{x_{2016}}{x_k}\right\}$.

Subiectul 2

Start 1p
Consideră $M(z), A(a), B(b), C(c), D(d)$ şi rescrie inegalitatea din ipoteză

$$z(\bar{b} + \bar{d} - \bar{a} - \bar{c}) + \bar{z}(b + d - a - c) \geq |b|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |c|^2$$

pe baza egalităţilor $MA^2 = |z - a|^2 = (z - a) \cdot \overline{z - a} = |z|^2 + |a|^2 - z\bar{a} - \bar{z}a$ şi a celorlalte egalităţi analoage 3p
Pentru orice z avem deci inegalitatea $2\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot (b + d - a - c)) \geq |b|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |c|^2$; dacă presupunem $f \overset{not}{=} b + d - a - c \neq 0$, atunci se obţine contradicţie (alegând de exemplu $z = \alpha f$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar); rezultă $f = 0$, adică $a + c = b + d$, de unde $ABCD$ este paralelogram 3p
Avem că $2(|b|^2 + |d|^2) \leq 2(|a|^2 + |c|^2)$ din care scăzând membru cu membru $|b + d|^2 = |a + c|^2$ şi utilizând identitatea paralelogramului obţinem $|b - d|^2 \leq |a - c|^2 \Leftrightarrow |b - d| \leq |a - c|$, adică $BD \leq AC$ 3p
Observaţie. Oricărei alte soluţii corecte (sintetice, analitice, etc.) i se acordă punctajul maxim.

Subiectul 3

Start 1p
(a) Pentru $x > y \geq 0$ arată că avem $\cosh_+(x) - \cosh_+(y) = \frac{e^y(e^{x-y} - 1)(1 - e^{-(x+y)})}{2} > 0$ şi deduce că funcţia $\cosh_+$ este strict crescătoare 2p
Arată că pentru $y \in [1, \infty)$, în urma substituţiei $e^x = t \geq 1$, ecuaţia $\cosh_+(x) = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = y$ are unica soluţie supraunitară $t = y + \sqrt{y^2 - 1}$, de unde deduce că funcţia $\cosh_+$ este inversabilă, precum şi expresia din enunţ a inversei acesteia 3p

(b) Factorizează $16y^5 - 20y^3 + 5y - 1 = (y-1)(4y^2+2y-1)^2 \geq 0$ 1p
Scrie echivalent egalitatea de la punctul (b) din enunţ, aplicându-i funcţia (injectivă) $\cosh_+$, astfel:

$$\cosh_+(5 \cdot \operatorname{arccosh}_+(y)) = 16y^5 - 20y^3 + 5y \qquad \text{......... 1p}$$

Demonstrează prin calcul direct că avem

$$\cosh_+(5x) = 16\cosh_+^5(x) - 20\cosh_+^3(x) + 5\cosh_+(x)$$

şi deduce egalitatea din enunţ 2p

Subiectul 4

Start 1p
(a) Pentru $t \in (0,1)$ şi $x \neq y \in (0,\infty)$ (care implică $\frac{x}{y} - 1 \neq 0$, dar şi $\frac{x}{y} - 1 > -1$) aplică inegalitatea lui Bernoulli:

$$\left(1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)^t < 1 + t \cdot \left(\frac{x}{y} - 1\right),$$

despre care observă, după calcule şi logaritmare, că este echivalentă cu concavitatea strictă a funcţiei ln 2p
(b) Fie $t \in (0,1)$ şi $x \neq y \in J$; atunci există $a \neq b \in I$ astfel încât $x = f(a), y = f(b)$; convexitatea strictă a inversei lui f înseamnă:

$$f^{-1}(tx + (1-t)y) < tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y), \qquad \text{......... 1p}$$

care prin aplicarea funcţiei f (strict crescătoare) este echivalentă cu $tx + (1-t)y < f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y))$ şi apoi cu

$$tf(a) + (1-t)f(b) < f(ta + (1-t)b),$$

care este adevărată în virtutea concavităţii stricte a lui f 1p
Aplică această proprietate şi deduce pe baza punctului (a) că funcţia e^x este strict convexă şi apoi că funcţia $\cosh_+$ este şi ea strict convexă 1p
(c) Presupune că ecuaţia ar avea trei soluţii distincte $x_1 < x_2 < x_3$; atunci există $t \in (0,1)$ astfel încât $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$; apoi obţine $ax_2 + b = f(x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_3) = t(ax_1 + b) + (1-t)(ax_3 + b) = ax_2 + b$ – contradicţie 2p
(d) Observă că $x \geq 1$; scrie echivalent ecuaţia astfel:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = (x-1) \cdot \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Aplicând proprietăţile din problema 3 şi din punctul (b) deduce că funcţia din membrul stâng este strict concavă pe $[1,\infty)$; din punctul (c) rezultă că ecuaţia are cel mult două soluţii, despre care observă că sunt $x = 1$ şi $x = 2$ 2p

Notă: La fiecare subiect *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem) *va fi punctată cu 10 p.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Hunedoara

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediţia a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Start 1p

Deduce că

$$2A^2+2B^2-2A-2B+I_n = 2(A^2+B^2-A-B+\frac{1}{2}I_n) = 2[(A-\frac{1}{2}I_n)^2+(B-\frac{1}{2}I_n)^2]$$

....2p

Scrie

$$2A^2+2B^2-2A-2B+I_n = 2[(A-\frac{1}{2}I_n)^2-i^2(B-\frac{1}{2}I_n)^2] \qquad (1)$$

....1p

Din (1) şi ipoteza $AB = BA$ deduce că

$$2A^2+2B^2-2A-2B+I_n = 2[(A-\frac{1}{2}I_n)-i(B-\frac{1}{2}I_n)][(A-\frac{1}{2}I_n)+i(B-\frac{1}{2}I_n)]$$

....2p

Notează $X = (A-\frac{1}{2}I_n)-i(B-\frac{1}{2}I_n)$ şi obţine că

$$\bar{X} = (A-\frac{1}{2}I_n)+i(B-\frac{1}{2}I_n)$$

....1 p

Deduce că $2A^2+2B^2-2A-2B+I_n = 2X\bar{X}$ 1p

Obţine

$$\det(2A^2+2B^2-2A-2B+I_n) = 2^n\det(X\bar{X}) \geq 0$$

....2p

Subiectul 2

Start 1p

Observă că

$$(xA+yB)^2 = x^2A^2+y^2B^2+xy(AB+BA) = x^2A^2+y^2B^2+xy(A^2+B^2)$$
$$= (x^2+xy)A^2+(y^2+xy)B^2, \quad (\forall)\ x,y\in\mathbb{C}. \qquad (1)$$

....2p

Scrie relaţia Cayley-Hamilton pentru matricea $xA + yB$:

$$(xA + yB)^2 - [tr(xA + yB)]\ (xA + yB) + [\det(xA + yB)]\ I_2 = O_2.$$

Utilizând relaţia (1) şi faptul că $tr(xA + yB) = x\ tr(A) + y\ tr(B) = 0$, obţine

$$(x^2 + xy)A^2 + (y^2 + xy)B^2 = -[\det(xA + yB)]\ I_2,\quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

....2p

Din relaţia Cayley-Hamilton pentru matricile A şi B, obţine $A^2 = -(\det A)I_2$, şi respectiv $B^2 = -(\det B)I_2$. Înlocuind în relaţia (2) obţine

$$\det(xA + yB) = (x^2 + xy)\det A + (y^2 + xy)\det B,\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

....2p

Dând valori convenabile pentru x, y în relaţia (3), obţine relaţiile

$$\det(A + B) = 2(\det A + \det B), \tag{4}$$

$$\det(A + \varepsilon B) = (1 + \varepsilon)\det A + (\varepsilon^2 + \varepsilon)\det B, \tag{5}$$

$$\det(A + \varepsilon^2 B) = (1 + \varepsilon^2)\det A + (\varepsilon + \varepsilon^2)\det B. \tag{6}$$

....1p

Înmulţeşte relaţia (5) cu $2\varepsilon^2$, o adună la relaţia (6) înmulţită cu 2ε, şi folosind formulele $\varepsilon^3 = 1$, $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, obţine

$$2\varepsilon^2\det(A + \varepsilon B) + 2\varepsilon\det(A + \varepsilon^2 B) = 2(\det A + \det B).$$

....1p

Foloseşte relaţia (4) şi finalizează. 1p

Subiectul 3

Start 1p

Prin inducţie arată că

$$2 < x_n < \frac{5}{2},\quad \forall n \geq 3 \tag{1}$$

deci (x_n) este mărginit. 2p

Consideră funcţia

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty),\quad f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

şi observă că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ ....0.5 p

Observă că $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ şi obţine că

$$x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1}),\quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \tag{2}$$

şi

$$x_{2n+2} = (f \circ f)(x_{2n}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \tag{3}$$

.... 1p

Deduce că $f \circ f$ este strict crescătoare .... 0.5 p

Calculează

$$x_2 = 3 \quad x_3 = \frac{7}{3} \quad x_4 = \frac{17}{7}$$

.... 0.5p

Din $x_1 < x_3$, utilizând relaţia (2) şi faptul că $f \circ f$ este strict crescătoare, deduce că (x_{2n-1}) este strict crescător. Foloseşte (1) şi obţine că şirul (x_{2n-1}) este convergent 1p

Din $x_2 > x_4$, utilizând relaţia (3) şi faptul că $f \circ f$ este strict crescătoare, deduce că (x_{2n}) este strict descrescător. Foloseşte (1) şi obţine că şirul (x_{2n}) este convergent 1p

Notează cu $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$ şi cu $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, trece la limită în relaţia de recurenţă şi obţine

$$l_1 = 2 + \frac{1}{l_2}, \quad l_2 = 2 + \frac{1}{l_1}. \tag{4}$$

.... 1p

Din (4) şi (1) deduce că $l_1 = l_2$ 0.75p

Din

$$l = 2 + \frac{1}{l}$$

şi (1) deduce că $l = 1 + \sqrt{2}$. 0.75p

Subiectul 4

Start 1p

(i) Observă că

$$x_2 = 81, \; x_3 = 3^{\frac{81}{24}} < 3^4 = 81, \quad x_4 < 3^{\frac{81}{5!}} < 3$$

.... 1.5 p

Prin inducţie arată că

$$1 < x_n < 3, \quad \forall n \geq 4. \tag{1}$$

.... 1p

Din (1) obţine că

$$1 < x_n < 3^{\frac{3}{(n+1)!}}, \quad \forall n \geq 5 \tag{2}$$

.... 1p

Din (2) deduce că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. 1p

(ii) Obţine că

$$x_n^{(n+1)!} = \left(3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}}\right)^{(n+1)!} = 3^{x_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

.... 1.5p

(iii) Deduce că

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)!(x_n-1) = \lim_{n\to\infty}(n+1)!\left(3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}}-1}{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}}\cdot x_{n-1}\right) \quad (3)$$

.... 1.5p

Foloseşte faptul că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{(n+1)!} = 0$$

şi din (3) deduce că

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)!(x_n-1) = (\ln 3)(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \ln 3.$$

.... 1.5p

Notă: La fiecare subiect, *o soluţie corectă* (alta decât cea propusă în barem), *va fi punctată cu 10 p.*

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a XII-a

1. *a) Arătaţi că funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ admite primitive şi orice primitivă a sa este strict crescătoare.*

b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) f este continuă pe $[0,2\pi]$ deci admite primitive **1p**
Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $F'(x)=\frac{1}{2+sin(x)}$, $\forall x\in[0,2\pi]$, deci F este cresc vatoare **1p**
b) Pe orice interval $I\subset[0,2\pi]$, cu $\pi\notin I$, primitiva se poate calcula printr-o schimbare de variabilă:

$$\int \frac{1}{2+sin(x)}\,dx=\int \frac{\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{tg\left(\frac{x}{2}\right)^2+tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$$ **2p**

Pe intervalul $[0,2\pi]$, o primitivă F a lui f va fi:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}+c_1\,, & x\in[0,\pi)\\ c_2\,, & x=\pi\\ \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}+c_3\,, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$$

Deoarece F trebuie să fie continuă, $c_1=c_2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $c_3=c_2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **3p**
Din consecinţa teoremei lui Lagrange rezultă că F este derivabilă în $x=\pi$ şi $F'(\pi)=f(\pi)$. Rezultă că

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=F(2\pi)-F(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$ **2p**

2. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel pe care definim operaţia "$*$" prin:*

$$a*b=a+b-ab,\ \forall a,b\in A,$$

şi mulţimea $G=\left\{a\in A\ \middle|\ \exists\, x\in A: a*x=x*a=0\right\}$.
Arătaţi că $(G,*)$ este un grup.

Soluţie şi barem: Start **1p**
$*$ este asociativă **2p**
$*$ este lege de compoziţie pe G: Pentru $a,b\in G$ există $x,y\in A$ astfel încât $a*x=x*a=0$ şi $b*y=y*b=0$. Atunci $(a*b)*(y*x)=a*(b*y)*x=a*x=0$, deci $a*b\in G$ **3p**
Elementul neutru este 0 .... **2p**
Orice element $a\in G$ are un simetric **2p**

3. *a) Demonstraţi că există o unică funcţie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea:*

$$x=f(x)e^{f(x)},\forall\ x\geq 0.$$

b) Arătaţi că f este continuă.
c) Arătaţi că f este derivabilă.

d) Calculaţi: $\int_0^e f(x)\mathrm{d}x$.

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Funcţia $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, definită prin $g(y) = ye^y, \forall y \geq 0$, este continuă, strict crescătoare şi verifică relaţiile $g(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, astfel că este bijectivă, cu inversa de asemenea continuă, strict crescătoare şi cu proprietăţile $g^{-1}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g^{-1}(x) = \infty$. Funcţia $f = g^{-1}$ verifică ecuaţia $x = f(x)e^{f(x)}, \forall x \geq 0$, şi f este mărginită pe orice interval mărginit. **2p**
b) Fie $x_0 \geq 0$ şi $x \geq 0, x \neq 0$. Atunci

$$(*) \quad x - x_0 = f(x)e^{f(x)} - f(x_0)e^{f(x_0)} = (f(x) - f(x_0))e^{f(x)} + f(x_0)\left(e^{f(x)} - e^{f(x_0)}\right)$$ **1p**

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $y \mapsto e^y$ pe intervalul cu capetele $f(x)$ şi $f(x_0)$ şi obţinem un c între $f(x)$ şi $f(x_0)$ încât

$$e^{f(x)} - e^{f(x_0)} = e^c(f(x) - f(x_0)).$$

Înlocuind în $(*)$, obţinem:

$$x - x_0 = (f(x) - f(x_0))\left(e^{f(x)} + f(x_0)e^c\right)$$

Trecem la limită pentru $x \to x_0$, ţinând cont că $e^{f(x)} + f(x_0)e^c > 1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ **1p**
c) Din

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{e^{f(x) + f(x_0)e^c}},$$

trecând la limită pentru $x \to x_0$, rezultă că f este derivabilă şi

$$f'(x_0) = \frac{1}{e^{f(x) + f(x_0)e^{f(x_0)}}}$$ **2p**

d) f este strict crescătoare, continuă şi $f(e) = 1$. Restricţia lui f la intervalul $[0,e]$ este inversabilă cu inversa $f^{-1} : [0,1] \to [o,e]$, $f^{-1}(y) = ye^y$ **1p**
Avem că:

$$\int_0^e f(x)\,dx + \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy = e\,.$$

Rezultă că $\int_0^e f(x)\,dx = e - 1$ **2p**

4. *Pe mulţimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin:*

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac\ ,\ bc + d).$$

a) Demonstraţi că $(G,\circ)$ este grup necomutativ.
b) Arătaţi că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Soluţie şi barem: Start **1p**
$*$ este lege de compoziţie pe G **1p**
$*$ este asociativă **1p**
Elementul neurtu este perechea $(1,0)$ **1p**

Orice element este inversabil cu $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ **2p**
Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, perechea $(-1, a)$ este un element de ordin 2 .... **2p**
Dacă $(a,b) \in G$ este un element de ordin 3, atunci

$$(1,0) = (a,b)^3 = (a^3, b(a^2+a+1)) \Longrightarrow a = 1, b = 0.$$

Dar $(1,0)$ este elementul neutru şi are ordinul 1, astfel că G nu conţine elemente de ordin 3 .... **2p**