

**Concursul Interjudețean de Matematică**  
**Memorialul "Traian Lalescu"**  
**Ediția a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017**  
**Clasa a IX-a**

1. Un număr de 1042017 de becuri sunt conectate la 1042017 comutatoare, astfel încât comutatorul cu numărul  $i$  este conectat la becul cu numărul  $j$  dacă și numai dacă  $i|j$ . Prin acționarea unui comutator se schimbă starea tuturor becurilor conectate la acesta. Presupunem că inițial toate becurile sunt stinse.
- a) Dacă sunt acționate toate comutatoarele într-o anumită ordine, fiecare o singură dată, arătați că starea finală a fiecărui bec este independentă de ordinea în care sunt acționate comutatoarele.
- b) Care becuri rămân aprinse după acționarea tuturor comutatoarelor câte o singură dată? Câte sunt aceste becuri?

2. Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic,  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$  și  $[CC_1]$  înălțimile sale, iar  $M$ ,  $N$  și respectiv  $P$ , mijloacele segmentelor  $[B_1C_1]$ ,  $[C_1A_1]$ , respectiv  $[A_1B_1]$ . Arătați că dreptele  $AM$ ,  $BN$  și  $CP$  sunt concurente.

3. Fie  $a, b, c > 0$  cu proprietatea că  $a + b + c = 1$ . Arătați că

$$9abc \leq ab + ac + bc \leq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. a) Fie  $ABC$  un triunghi,  $O$  centrul cercului său circumscris,  $R$  raza cercului circumscris, iar  $r$  raza cercului înscris triunghiului  $ABC$ . Arătați că

$$\varepsilon_A \cdot d(O, BC) + \varepsilon_B \cdot d(O, CA) + \varepsilon_C \cdot d(O, AB) = R + r,$$

unde  $\varepsilon_X = \operatorname{sgn}(90 - m(X))$ .

- b) Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil, iar  $r_A, r_B, r_C, r_D$  razele cercurilor înscrise în triunghiurile  $BCD, CDA, DAB$ , respectiv  $ABC$ . Arătați că

$$r_A + r_C = r_B + r_D.$$

- c) Formulați o generalizare a proprietății de la b) pentru poligoane inscriptibile oarecare.

Timp de lucru: 3 ore

*Subiect compus de lect.dr.Mihai Chiș*

Universitatea de Vest din Timișoara  
Inspectoratul Școlar Județean Arad

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

**Clasa a X-a**

1. Fie  $n \geq 2$  un număr natural fixat. Comparați numerele  $A(n)$  și  $B(n)$ , unde

$$A(n) = \frac{2^{\sqrt{\log_2 3}} + 2^{\sqrt[3]{\log_2 3}} + \dots + 2^{\sqrt[n]{\log_2 3}}}{n-1}, \quad B(n) = 3^{\frac{\sqrt{\log_3 2} + \sqrt[3]{\log_3 2} + \dots + \sqrt[n]{\log_3 2}}{n-1}}.$$

2. Fie  $n$  un număr natural fixat. Aflați partea întreagă a numărului  $N(n)$ , unde

$$N(n) = \sum_{k=0}^n \log_{2^{2^k}} \left[ \left( 1 + 2^{2^k} \right)^{2^k} \right].$$

3. Fie  $\mathcal{M} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1 + z_2| = |z_1^2 + z_2^2| = 2\}$ . Determinați  $\min_{(z_1, z_2) \in \mathcal{M}} |z_1^3 + z_2^3|$ .

4. Determinați toate funcțiile  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu  $f(0) = 0$  și  $f(n) = f\left(\left[\frac{n}{2017}\right]\right) + 1$ , ( $\forall n \geq 1$ ), unde prin  $[x]$  am notat partea întreagă a numărului real  $x$ .

Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

**Clasa a XI-a**

1. Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții astfel încât  $g$  este continuă și pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem

$$f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(g(x)) \notin \mathbb{Q}.$$

Arătați că funcția  $f$  are cel puțin un punct de discontinuitate.

2. (a) Fie  $\lambda > 1$  un număr real și  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale cu proprietatea că șirul  $(\lambda x_{n+1} - x_n)_{n \geq 0}$  este convergent. Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea convergent.

(b) Fie  $(y_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale cu proprietatea că șirul  $(6y_{n+2} - 5y_{n+1} + y_n)_{n \geq 0}$  este convergent. Arătați că șirul  $(y_n)_{n \geq 0}$  este de asemenea convergent.

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$  două matrice cu proprietatea că

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Arătați că  $(AB)^2 = 2AB$  și că  $\text{rang}(AB) = 2$ .

(b) Arătați că  $BA = 2I_2$ .

4. (a) Arătați că nu există numere întregi  $a, b, c$  astfel încât  $n^3 + an^2 + bn + c$  este pătrat perfect pentru orice număr natural  $n$ .

(b) Fie  $a, b, c$  numere întregi,  $a \neq 0$ , astfel încât  $an^2 + bn + c$  este pătrat perfect pentru orice număr natural nenul  $n$ , adică există un șir de numere naturale  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu proprietatea că  $an^2 + bn + c = x_n^2$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(b<sub>1</sub>) Arătați că șirul  $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și determinați limita acestui șir.

(b<sub>2</sub>) Arătați că există numerele întregi  $u, v$  astfel încât  $a = u^2, b = 2uv, c = v^2$ .

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXXI-a, Arad, 31 martie - 2 aprilie 2017

**Clasa a XII-a**

1. Dacă  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$ , atunci  $f$  are cel puțin două rădăcini distincte în intervalul  $(0, 1)$ .

2. Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[ \frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k}} \right], k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Arătați că  $f$  este integrabilă pe  $[0, 1]$  și calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit cu elementul neutru  $e$ .

(i) Arătați că există un număr impar de elemente  $x \in G$  astfel încât  $x^3 = e$ .

(ii) Arătați că există un număr par de elemente  $x \in G$  astfel încât  $x^2 \neq e$ .

4. (i) Arătați că toate grupurile cu trei elemente sunt izomorfe între ele.

(ii) Demonstrați că grupul  $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$  nu este izomorf cu grupul  $(\mathbb{Q}, +)$ .

Timp de lucru: 3 ore

**Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a IX-a**

1. Determinați funcțiile  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  care verifică  $3f(f(x)) = 7f(x) - 2x$  pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Soluție și barem:**

Start ..... 1p  
 Se observă că funcția  $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{Z}$  este soluție a problemei ..... 2p  
 Presupunem că problema are și alte soluții; atunci există  $x_0 \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $f(x_0) - 2x_0 \neq 0$ .  
 Din ipoteză avem  $3(f(f(x_0)) - 2f(x_0)) = f(x_0) - 2x_0$  ..... 2p  
 Înlocuind  $x$  cu  $f^{(k)}(x_0)$  în ipoteză, pentru  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , se obține inductiv  
 $3^n (f^{(n+1)}(x_0) - 2f^{(n)}(x_0)) = f(x_0) - 2x_0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  ..... 3p  
 Numărul întreg nenul  $f(x_0) - 2x_0$  se divide cu orice putere a lui 3 – contradicție; rezultă  
 unicitatea soluției ..... 2p

2. Fie  $ABCD$  un trapez ( $AB \parallel CD$ ) și punctele  $M \in (BC), N \in (AD)$ . Arătați că  $AM \parallel CN$  dacă și numai dacă  $BN \parallel DM$ .

**Soluție și barem:**

**Varianta 1**

Start ..... 1p  
 Există  $\lambda > 0, h, k \in (0, 1)$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MB} = h \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{NA} = k \overrightarrow{DA}$  ..... 2p  
 Se obține:  
 $\overrightarrow{AM} = h \overrightarrow{AC} + (1 - h) \overrightarrow{AB} = h \overrightarrow{AC} + (1 - h) \lambda \overrightarrow{DC}$  ..... 1p  
 $\overrightarrow{NC} = (1 - k) \overrightarrow{AC} + k \overrightarrow{DC}$  ..... 1p  
 $AM \parallel CN \Leftrightarrow \exists \mu : \overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \frac{h}{1 - k} = \frac{(1 - h) \lambda}{k} \Leftrightarrow hk = \lambda(1 - h)(1 - k)$  ..... 1p  
 Analog:  $\overrightarrow{BN} = k \overrightarrow{BD} + (1 - k) \overrightarrow{BA} = k \overrightarrow{BD} + (1 - k) \lambda \overrightarrow{CD}$  ..... 1p  
 $\overrightarrow{MD} = (1 - h) \overrightarrow{BD} + h \overrightarrow{CD}$  ..... 1p  
 $BN \parallel DM \Leftrightarrow \exists \nu : \overrightarrow{BN} = \nu \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \frac{k}{1 - h} = \frac{(1 - k) \lambda}{h} \Leftrightarrow hk = \lambda(1 - h)(1 - k)$  ..... 1p  
 Din cele de mai sus rezultă  $AM \parallel CN \Leftrightarrow BN \parallel DM$  ..... 1p

**Varianta 2** (cu produs vectorial)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad AM \parallel CN &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{CN} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \times (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}) = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}_{=\vec{0} \text{ din } AB \parallel CD} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{DN} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{DN} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad BN \parallel DM &\Leftrightarrow \overrightarrow{BN} \times \overrightarrow{DM} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}) \times (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \times \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} \times (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{DN} \times \overrightarrow{BM} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DN} \times \overrightarrow{BM} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Punctajul se acordă astfel: start – **1p**; câte **4p** pentru fiecare set de echivalențe; **1p** pentru finalizare.

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care verifică

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \leq \frac{f(x)+2f(y)}{3}$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Arătați că:

(a)  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

**Soluție și barem:**

Start ..... **1p**

(a) Inegalitatea este adevărată pentru  $x = y$ . Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  cu  $x < y$ . Atunci se observă că valorile reale

$$x < \frac{5x+y}{6} < \frac{2x+y}{3} < \frac{x+y}{2} < \frac{x+2y}{3} < \frac{x+5y}{6} < y$$

împart intervalul  $[x, y]$  în 6 subintervale de lungimi egale cu  $\frac{y-x}{6}$  ..... **1p**

Aplicând ipoteza se obțin inegalitățile:

(1)  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{2 \cdot \frac{2x+y}{3} + \frac{x+5y}{6}}{3}\right) \leq \frac{2f\left(\frac{2x+y}{3}\right) + f\left(\frac{x+5y}{6}\right)}{3}$  ..... **1p**

(2)  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{2 \cdot \frac{x+2y}{3} + \frac{5x+y}{6}}{3}\right) \leq \frac{2f\left(\frac{x+2y}{3}\right) + f\left(\frac{5x+y}{6}\right)}{3}$  ..... **1p**

(3)  $f\left(\frac{5x+y}{6}\right) = f\left(\frac{2x + \frac{x+y}{2}}{3}\right) \leq \frac{2f(x) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3}$  ..... **1p**

(4)  $f\left(\frac{x+5y}{6}\right) = f\left(\frac{2y + \frac{x+y}{2}}{3}\right) \leq \frac{2f(y) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3}$  ..... **1p**

Însumând (1) și (2), apoi utilizând (3), (4) și ipoteza (adică inegalitățile  $f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \leq \frac{f(x)+2f(y)}{3}$  și  $f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \leq \frac{2f(x)+f(y)}{3}$ ) se obține (a) ..... **2p**

(b) Utilizând (a):  $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\frac{x+2\cdot\frac{y+z}{2}}{3}\right) \leq \frac{f(x)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)}{3} \leq \frac{f(x)+2\cdot\frac{f(y)+f(z)}{2}}{3} = \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$  ..... **2p**

4. Trei drepte care trec prin vârfurile  $A, B$ , respectiv  $C$  ale unui triunghi  $ABC$  intersectează a doua oară cercul circumscris acestui triunghi în punctele  $A_2, B_2$ , respectiv  $C_2$  și laturile  $(BC), (CA), (AB)$  în punctele  $A_1, B_1$ , respectiv  $C_1$ . Arătați că

$$\frac{AA_2}{A_1A_2} \cdot \frac{BB_2}{B_1B_2} \cdot \frac{CC_2}{C_1C_2} \geq 64.$$

**Soluție și barem:**

Start ..... **1p**

Exprimând puterea punctului  $A_1$  față de cercul circumscris în două moduri rezultă

(1)  $\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{AA_1}{A_1A_2} + 1 = \frac{AA_1^2}{BA_1 \cdot A_1C} + 1$  ..... **1p**

Din relația lui Stewart obținem

$AA_1^2 \cdot BC = AB^2 \cdot A_1C + AC^2 \cdot BA_1 - BA_1 \cdot A_1C \cdot BC$ , de unde

(2)  $\frac{AA_1^2}{BA_1 \cdot A_1C} + 1 = \frac{AB^2}{BC \cdot BA_1} + \frac{AC^2}{BC \cdot A_1C}$  ..... **2p**

Din (1) și (2) cu inegalitatea lui Bergström ("CBS în forma Titu Andreescu") se obține:

(3)  $\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{AB^2}{BC \cdot BA_1} + \frac{AC^2}{BC \cdot A_1C} \geq \frac{(AB+AC)^2}{BC^2}$  ..... **2p**

Scriind inegalitățile analoge  $\frac{BB_2}{B_1B_2} \geq \frac{(AB+BC)^2}{AC^2}$  și  $\frac{CC_2}{C_1C_2} \geq \frac{(BC+AC)^2}{AB^2}$  rezultă că este suficient să demonstrăm  $(AB+AC)(AB+BC)(BC+AC) \geq 8BC \cdot AC \cdot AB$  sau echivalent  $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$  ..... **2p**

Această din urmă inegalitate rezultă înmulțind inegalitățile  $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ ,  $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ ,  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  ..... **2p**

**Notă:** La fiecare problemă, orice soluție **completă și corectă** (alta decât cea propusă în barem) va fi punctată cu 10p.

**Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a X-a**

**1. Calculați sumele**

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2017} k \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{2018}\right),$$

$$S_2 = 24 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{2018}\right).$$

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Considerăm  $z = \cos\left(\frac{2\pi}{2018}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2018}\right)$ . Atunci  $S_1$  și  $S_2$  sunt părțile reale ale sumelor

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{2017} k \cdot z^k,$$

respectiv

$$\sigma_2 = 24 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot z^k$$

..... **2p**

Pentru  $\sigma_1$  avem

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{k=1}^{2017} k \cdot z^k = \sum_{k=1}^{2017} \sum_{l=k}^{2017} z^l = \sum_{k=1}^{2017} \frac{z^k - z^{2018}}{1 - z} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{2017} z^k - 2017}{1 - z} = \frac{z - z^{2018} - 2017(1 - z)}{(1 - z)^2} = \frac{2018(z - 1)}{(z - 1)^2} = \frac{2018}{z - 1} = \\ &= -2018 \cdot \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2018}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2018}\right)} = -2018 \cdot \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2018}\right)} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2018}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) = \\ &= -1009 \cdot \left(1 + i \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right). \end{aligned}$$

Obținem că  $S_1 = \operatorname{Re}(\sigma_1) = -1009$ . ..... **2p**

Pentru  $\sigma_2$  avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2017} k^2 \cdot z^k &= \sum_{k=1}^{2017} z^k \cdot \sum_{m=1}^k (2m - 1) = \sum_{m=1}^{2017} (2m - 1) \sum_{k=m}^{2017} z^k = \\ &= \sum_{m=1}^{2017} (2m - 1) \cdot \frac{z^m - z^{2018}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \cdot (-2017 + 2\sigma_1) = \frac{1}{1 - z} \cdot \left(-4035 - 2018i \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + i \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right) \cdot \left(-4035 - 2018i \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right). \end{aligned}$$

..... **4p**

Obținem

$$S_2 = \operatorname{Re}(\sigma_2) = 24 + \frac{3}{2} \cdot \left(4035 - 2018 \cdot \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2018}\right)\right).$$

..... **1p**

2. Rezolvați ecuația

$$3^{x^2+73} + 27^{9x} = 3^{27x+1} \cdot \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}).$$

**Soluție și barem:** Start ..... 1p  
 Împărțind ambii membri ai ecuației prin  $3^{27x+1}$ , aceasta devine

$$3^{x^2-27x+72} + \frac{1}{3} = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}).$$

..... 1p  
 Dacă  $f(x) = 3^{x^2-27x+72} + \frac{1}{3}$  și  $g(x) = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x})$ , ambele funcții sunt  $\frac{27}{2}$ -pare, astfel că dacă  $x$  este o soluție a ecuației, atunci și  $27-x$  este o soluție. .... 1p

Pe intervalul  $[0, 27]$  funcția  $f$  este convexă, fiind compunerea unei funcții convexe crescătoare cu o funcție convexă, iar  $g$  este concavă, fiind compunerea unei funcții concave crescătoare cu o funcție concavă. .... 2p

Prin urmare, ecuația poate avea în acest interval cel mult 2 soluții. .... 1p

Se observă că  $x = 3$ , și deci și  $x = 24$ , este soluție. .... 1p

Vom arăta că acestea sunt singurele soluții. Datorită simetriei, este suficient să arătăm că ecuația nu are soluții cu  $x > 27$ .

Pentru  $x > 27$  avem că  $f(x) > f(27) = 3^{72} + \frac{1}{3}$ . .... 1p  
 respectiv

$$g(x) = \log_3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27-x}) = \log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x-27)} + \sqrt[3]{(x-27)^2}} \leq \log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{27^2}} = 2$$

..... 1p

Rezultă că ecuația  $f(x) = g(x)$  nu are soluții cu  $x > 27$ , deci nici cu  $x < 0$ . Singurele soluții ale ecuației sunt atunci  $x = 3$  și  $x = 24$ . .... 1p

3. a) Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , există  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  cu proprietatea că  $f^{[n]}(x) = x^n$ ,  $(\forall)x > 0$ , unde  $f^{[1]} = f$  și  $f^{[k+1]} = f \circ f^{[k]}$ ,  $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$ .  
 b) Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , există  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f^{[n]}(x) = x^n$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ .  
 c) Studiați dacă există  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cu proprietatea că  $(f \circ f)(z) = z^2$ ,  $(\forall)z \in \mathbb{C}$ .

**Soluție și barem:** Start ..... 1p

a) Pentru o funcție putere  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^\alpha$ , avem că  $f^{[n]}(x) = x^{\alpha^n}$  ..... 1p  
 Funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^{\sqrt[n]{n}}$ ,  $(\forall)x > 0$  are proprietatea că

$f^{[n]}(x) = x^n$ ,  $(\forall)x > 0$ . .... 2p

b) Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \text{sgn}(x) \cdot |x|^{\sqrt[n]{n}}$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$  are proprietatea că  
 $f^{[n]}(x) = x^n$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ . .... 2p

c) Arătăm că nu există o astfel de funcție.

Presupunând că o funcție  $f$  ar avea proprietatea din enunț, rezultă că 0 și 1 sunt singurele puncte fixe ale lui  $f \circ f$ , astfel că  $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$ . .... 1p

Fie  $a = f(-1)$  și  $b = f(i)$ . Avem că  $f(a) = (f \circ f)(-1) = 1$ , astfel că  $a^2 = (f \circ f)(a) = f(1)$ , respectiv  $f(b) = (f \circ f)(i) = -1$ , și  $b^2 = f(-1) = a$ . .... 1p

Dacă  $f(1) = 1$ , rezultă că  $a \in \{-1, 1\}$ , și cum  $f(-1) \neq -1$ , rezultă că  $a = 1$  și atunci  $b \in \{-1, 1\}$  și  $f(b) = 1$ . Obținem atunci contradicția  $-1 = f(b) = 1$ .

Dacă  $f(1) = 0$ , atunci  $a = 0$  și  $b = 0$ . Rezultă atunci  $-1 = f(b) = f(0) = 1$ , contradicție. .... 1p

Prin urmare, nu există funcții cu proprietatea din enunț. .... **1p**

4. Fie  $\mathcal{K} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ . Pentru orice triunghi  $XYZ$  din plan cu afixele vârfurilor  $x, y, z \in \mathbb{C}$  și orice  $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{K}$  numim  $\lambda$ -punct al triunghiului  $XYZ$  punctul de afix  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$ .

Fie  $ABC$  un triunghi în plan cu centrul de greutate  $G$  și  $\lambda \in \mathcal{K}$  fixat. Fie  $P$   $\lambda$ -punctul triunghiului  $ABC$ ,  $A_1 \in AP \cap BC$ ,  $B_1 \in BP \cap AC$ ,  $C_1 \in CP \cap AB$ . De asemenea, fie  $K$   $\lambda$ -punctul triunghiului  $AB_1C_1$ ,  $L$   $\lambda$ -punctul triunghiului  $A_1BC_1$  și  $M$   $\lambda$ -punctul triunghiului  $A_1B_1C$ . Arătați că:

- a) Dreptele  $AK$ ,  $BL$  și  $CM$  sunt concurente într-un punct  $Q$ , coliniar cu  $P$  și  $G$ , cu  $\overline{PQ} = 3 \cdot \overline{GQ}$ .  
 b) Dacă  $G_1$  este centrul de greutate al triunghiului  $A_1B_1C_1$ , iar  $G_2$  centrul de greutate al triunghiului  $KLM$ , atunci  $G_1$  este mijlocul segmentului  $[PG_2]$ .

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Vom nota afixul fiecărui punct cu litera mică corespunzătoare literei cu care este notat punctul.

a) Afixele punctelor  $A_1, B_1, C_1$  sunt

$$a_1 = \frac{\beta \cdot b + \gamma \cdot c}{\beta + \gamma}, \quad b_1 = \frac{\alpha \cdot a + \gamma \cdot c}{\alpha + \gamma}, \quad c_1 = \frac{\alpha \cdot a + \beta \cdot b}{\alpha + \beta}.$$

..... **1p**

Pentru punctele  $K, L, M$  avem

$$k = \alpha \cdot a + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = \left( \alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta} \right) \cdot a + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta} \cdot b + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} \cdot c.$$

Analog,

$$l = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b + \gamma \cdot c_1 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta} \cdot a + \left( \beta + \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta} \right) \cdot b + \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \cdot c,$$

și

$$m = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma} \cdot a + \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} \cdot b + \left( \gamma + \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} \right) \cdot c.$$

..... **1p**

Deoarece numărul complex  $q$  dat de

$$q = \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot a + \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot b + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot c$$

are atunci proprietatea că

$$\frac{a - q}{a - k} \in \mathbb{R}, \quad \frac{b - q}{b - l} \in \mathbb{R}, \quad \frac{c - q}{c - m} \in \mathbb{R},$$

..... **1p**

rezultă că  $Q \in AK \cap BL \cap CM$ . .... **1p**

În plus, cum afixul centrului de greutate  $G$  al triunghiului  $ABC$  are afixul  $g = \frac{a+b+c}{3}$ , rezultă că  $p + 2q = 3g$ , relație echivalentă cu  $q - p = 3(g - p)$ , ceea ce demonstrează relația enunțată. .... **1p**

b) Cum  $g_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$  și  $g_2 = \frac{k+l+m}{3}$ , se verifică prin calcul că  $p + g_2 = 2g_1$ , ceea ce demonstrează proprietatea enunțată. .... **3p**

**Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a XI-a**

1. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{e}.$$

Studiați convergența șirului  $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ , unde prin  $\{a\}$  s-a notat partea fracționară a numărului real  $a$ .

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Presupune că șirul  $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1)$  este convergent și astfel există  $l \in [0, 1]$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = l$  ..... **2p**

Folosind identitatea  $[x_n] = x_n - \{x_n\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , obține

$$[x_{n+1}] - [x_n] = (x_{n+1} - x_n) - (\{x_{n+1}\} - \{x_n\}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

..... **2p**

Utilizând relația de mai sus deduce că șirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $b_n = [x_{n+1}] - [x_n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , este convergent cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{e} - (l - l) = \frac{1}{e}$  ..... **2p**

Observă că  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$  și cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{e}$ , ajunge la o contradicție. Astfel, presupunerea făcută este falsă și deci șirul  $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  este divergent ..... **3p**

2. Există matrice  $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^2 + B^2 = AB$  și  $\det(AB - BA) \neq 0$ ? Justificați răspunsul.

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Presupune că există două matrice  $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$  cu proprietățile cerute. Notând  $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , ținând cont că  $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$ ,  $1 + \bar{\varepsilon} = -\varepsilon$  și utilizând relația  $A^2 + B^2 = AB$ , obține succesiv

$$(A + \varepsilon B)\overline{(A + \varepsilon B)} = A^2 + B^2 + \bar{\varepsilon}AB + \varepsilon BA = (1 + \bar{\varepsilon})AB + \varepsilon BA = -\varepsilon(AB - BA) \quad (1)$$

..... **3p**

Utilizând faptul că  $\det(X \cdot \bar{X}) = \det(X) \cdot \overline{\det(X)} = |\det(X)|^2 \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ,  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , deduce din relația (1) următoarele

$$\det \left[ (A + \varepsilon B)\overline{(A + \varepsilon B)} \right] = \varepsilon^{2018} \det(AB - BA) \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$$

..... **2p**

Cum din ipoteză avem  $\det(AB - BA) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pentru ca  $\varepsilon^{2018} \det(AB - BA) \in [0, \infty)$ , deduce că este necesar ca  $\varepsilon^{2018} \in \mathbb{R}$  ..... **2p**

Utilizând faptul că  $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  este rădăcină de ordinul trei a unității și cum  $3 \nmid 2018$ , deduce că  $\varepsilon^{2018} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Astfel concluzionează că presupunerea făcută este falsă, deci nu există matrice  $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$  cu proprietățile cerute ..... **2p**

**3.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  astfel încât  $AA^\top = BB^\top = I_n$  și  $Tr(AB^\top) = n$ . Arătați că  $A^n = B^n$ .

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Folosind relațiile  $AA^\top = BB^\top = I_n$ , deduce

$$(A - B)(A - B)^\top = AA^\top - AB^\top - BA^\top + BB^\top = 2I_n - (AB^\top + BA^\top) \quad (1)$$

..... **2p**

Utilizând faptul că  $Tr(X) = Tr(X^\top)$ ,  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  și proprietățile transpusei, deduce

$$Tr(BA^\top) = Tr[(BA^\top)^\top] = Tr[(A^\top)^\top B^\top] = Tr(AB^\top) \quad (2)$$

..... **1p**

Utilizând proprietatea  $Tr(X + Y) = Tr(X) + Tr(Y)$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , relația (2) și faptul că  $Tr(AB^\top) = n$ , deduce

$$Tr(AB^\top + BA^\top) = 2Tr(AB^\top) = 2n \quad (3)$$

..... **1p**

Din relațiile (1) și (3) deduce succesiv

$$Tr[(A - B)(A - B)^\top] = Tr(2I_n) - Tr(AB^\top + BA^\top) = 2n - 2n = 0 \quad (4)$$

..... **2p**

Arată că singura matrice  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ce verifică  $Tr(XX^\top) = 0$  este matricea nulă,  $X = O_n$ , deduce din relația (4) că  $A - B = O_n$  și finalizează ..... **3p**

**4.** Determinați toate funcțiile continue  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f(0) = 1$  și

$$(f(x))^k = f(x\sqrt{k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0.$$

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Pentru  $k \mapsto 2$  și  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}}$  obține  $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \geq 0, \quad \forall x \geq 0$  ..... **1p**

Presupune că există  $x_0 > 0$  astfel încât  $f(x_0) = 0$  (pentru  $x_0 = 0$  avem din ipoteză  $f(x_0) = 1$ ). Arată inductiv că

$$f\left(\frac{x_0}{(\sqrt{2})^n}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

trece la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  în (1) și din continuitatea lui  $f$  deduce că  $f(0) = 0$ , contrazicând ipoteza  $f(0) = 1$ . Obține astfel că  $f(x) > 0, \forall x \geq 0$

..... **2p**

Notează  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \ln f(x), \forall x \geq 0$  și deduce că

$$F(x\sqrt{k}) = kF(x), \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 \tag{2}$$

..... **1p**

Pentru  $k \mapsto m^2, m \in \mathbb{N}$ , din relația (2) obține

$$F(mx) = m^2F(x), \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 \tag{3}$$

..... **0.5p**

Pentru  $x \mapsto \frac{1}{n} \cdot x, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , din relația (3) obține

$$F\left(\frac{m}{n}x\right) = m^2F\left(\frac{1}{n}x\right), \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{4}$$

..... **0.5p**

Pentru  $x \mapsto \frac{1}{n} \cdot x, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , din relația (2) obține

$$F\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{k}F\left(\frac{\sqrt{k}}{n}x\right), \forall n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{5}$$

și astfel pentru  $k \mapsto n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , din relația (5) deduce

$$F\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n^2}F(x), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0 \tag{6}$$

..... **1p**

Din relațiile (4) și (6) obține

$$F\left(\frac{m}{n}x\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 F(x), \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \geq 0$$

și astfel deduce

$$F(q) = q^2F(1), \forall q \in \mathbb{Q}_+, \tag{7}$$

unde  $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$  ..... **1p**

Cum pentru orice  $x \geq 0$  fixat arbitrar, există un șir  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ , din relația (7) deduce

$$F(q_n) = q_n^2F(1), \forall n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

și astfel din continuitatea lui  $F = \ln \circ f$ , prin trecere la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  în (8) obține  $F(x) = x^2 F(1)$ . Deduce

$$F(x) = x^2 F(1), \forall x \geq 0$$

..... **1p**

Notând  $F(1) = c \in \mathbb{R}$ , din relația de mai sus și identitatea  $f(x) = e^{F(x)}$ ,  $\forall x \geq 0$ , obține

$$f(x) = e^{cx^2}, \forall x \geq 0,$$

funcție ce verifică ipotezele problemei ..... **1p**

**Soluții și barem orientativ de corectare la clasa a XII-a**

1. Fie  $(G, \circ)$  un grup, iar  $H$  o mulțime arbitrară cu proprietatea că există  $f : G \rightarrow H$ , o funcție bijectivă. Demonstrați că există o unică lege de compoziție,  $*$ , pe  $H$  astfel încât  $(H, *)$  este un grup și  $f$  este izomorfism de grupuri.

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Presupunem că există  $f : (H, *) \rightarrow (G, \circ)$  astfel încât  $(H, *)$  este grup și  $f$  este izomorfism de grupuri. Atunci  $f^{-1} : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$  este de asemenea izomorfism și

$$(\forall) x, y \in H : f^{-1}(x * y) = f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y),$$

de unde

$$x * y = f(f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)),$$

prin urmare, dacă legea există ea este unică. .... **2p**

Raționamentul de mai sus sugerează definiția legii  $*$  pe  $H$ :

$$x * y = f(f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)), \quad x, y \in H.$$

Din această definiție rezultă că  $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$  ..... **2p**

Asociativitatea: Fie  $x, y, z \in H$ . Avem:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * f(f^{-1}(y) \circ f^{-1}(z)) = f\left(f^{-1}(x) \circ \text{big}(f^{-1}(y) \circ f^{-1}(z))\right) = \\ &= f\left((f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)) \circ f^{-1}(z)\right) = (x * y) * z \dots \dots \dots \mathbf{1p} \end{aligned}$$

Fie  $e \in G$  elementul său neutru și  $x \in H$ . Atunci

$$x * f(e) = f(f^{-1}(x) \circ e) = f(f^{-1}(x)) = x$$

și analog  $f(e) * x = x$ , ceea ce arată că  $f(e)$  este elementul neutru în  $H$ . .... **1p**

Pentru  $x \in H$  considerăm  $f\left((f^{-1}(x))^{-1}\right) \in H$ . Avem:

$$x * f\left((f^{-1}(x))^{-1}\right) = f\left(f^{-1}(x) \circ (f^{-1}(x))^{-1}\right) = f(e),$$

ceea ce arată că  $f\left((f^{-1}(x))^{-1}\right)$  este simetricul lui  $x \in H$ , deci  $H$  este grup. .... **1p**

Funcția bijectivă  $f$  este un izomorfism deoarece, pentru orice  $x, y \in G$  avem:

$$f(x) * f(y) = f\left(f^{-1}(f(x)) \circ f^{-1}(f(y))\right) = f(x \circ y) \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

2. a) Demonstrați că mulțimile

$$\begin{aligned} A &= \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} \\ B &= \{c + d\sqrt{3} : c, d \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor reale, sunt inele.

b) Arătați că inelele  $A$  și  $B$  nu sunt izomorfe.

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

a) Se verifică axiomele inelului ..... **4p**

b) Presupunem că ar exista un izomorfism de inele  $f : A \rightarrow B$ . În  $A$  există un element  $\alpha$  cu proprietatea  $\alpha^2 = 2$ . Atunci

$$f(\alpha^2) = f(2) = f(1 + 1) = 1 + 1 = 2,$$

deci  $(f(\alpha))^2 = 2$  ..... **1p**

Dar  $B$  nu conține nici un element  $\beta$  cu  $\beta^2 = 2$  ..... **1p**

Presupunem, prin absurd, că există  $c, d \in \mathbb{Z}$  cu  $(c + d\sqrt{3})^2 = 2$ . Atunci

$$c^2 + 3d^2 + 2cd\sqrt{3} = 2.$$

Rezultă că  $cd = 0$  și deci  $c = 0$  sau  $d = 0$ . Dacă  $c = 0$  atunci  $3d^2 = 2$ , egalitate imposibilă în  $\mathbb{Z}$ , iar dacă  $d = 0$  atunci  $c^2 = 2$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ . Contradicție. .... **3p**

**3. Se consideră funcția**

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}.$$

a) Arătați că  $f$  admite primitive și că orice primitivă  $F$  a lui  $f$  este strict crescătoare.

b) Calculați  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ .

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

a) Funcția  $f$  este continuă, deci admite primitive ..... **1p**

Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ . Atunci  $F'(x) = f(x) > 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $F$  este strict crescătoare. .... **3p**

O primitivă  $F$  a lui  $f$  este ..... **3p**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} & , x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & , x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & , x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Atunci

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

**4. Arătați că**

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt > 0,$$

pentru orice  $x \in [0, 2\pi]$ .

**Soluție și barem:** Start ..... **1p**

Definim  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$ . Avem că  $f'(x) > 0$ , pentru orice  $x \in (0, \pi)$  și

$f'(x) < 0$ , pentru orice  $x \in (\pi, 2\pi)$ .

Cum  $f(0) = 0$  este suficient să demonstrăm că  $f(2\pi) > 0$  ..... **4p**

Avem

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1} dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{1+u+\pi} du = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+u+\pi} du = \\ &= \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi} \right) \sin t dt > 0 \dots\dots\dots \mathbf{5p} \end{aligned}$$