Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a V-a

1. *Scriem numerele naturale nenule consecutive sub forma*

1, 2, 3,
4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,
. . .

(pe fiecare linie avem cu 3 numere mai mult decât pe cea precedentă).
Pe ce linie se va găsi numărul 2018? Pe a câta poziţie?

Soluţie şi barem:

Start **1p**

Se observă că pe linia k se găsesc $3k$ numere. **1p**

2018 se va afla pe linia k dacă $3+3\cdot 2+\cdots+3(k-1) < 2018 \le 3+3\cdot 2+\cdots+3k$ **3p**

Inegalitatea revine la $3\dfrac{k(k-1)}{2} < 2018 \le 3\dfrac{k(k+1)}{2}$, de unde obţinem $k=37$ **3p**

Fie p poziţia lui 2018 pe linia 37. Atunci $2018 = 3+3\cdot 2+\cdots+3\cdot 36+p$, de unde rezultă că $p=20$. **2p**

2. *Dacă se adună cele 99 numere naturale 9, 99, 999, . . . , $\underbrace{99\ldots9}_{99\ cifre}$, câte cifre 1 va conţine rezultatul?*

Soluţie şi barem:

Start **1p**

Scriem $9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{99\text{ cifre}} = 10-1+10^2-1+10^3-1+\cdots+10^{99}-1$ **4p**

Suma va fi deci $\underbrace{11\ldots1}_{99\text{ cifre}}0 - 99 = \underbrace{11\ldots1}_{97\text{ cifre}}000+110-99 = \underbrace{11\ldots1}_{97\text{ cifre}}000+11$ **3p**

Rezultatul are 99 cifre 1 . . . . **2p**

3. *Determinaţi $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ cifre distincte astfel încât*

$$\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc} = \overline{aaa}+\overline{ddd}+\overline{eee} = \overline{fghi}.$$

Soluţie şi barem:

Start **1p**

Relaţia din enunţ revine la $111(a+b+c) = 111(a+d+e) = \overline{fghi}$. **1p**

Deoarece $\overline{fghi}$ are 4 cifre, obţinem $a+b+c \ge 10$. Cum a, b, c sunt cifre distincte rezultă $a+b+c \le 24$ **1p**

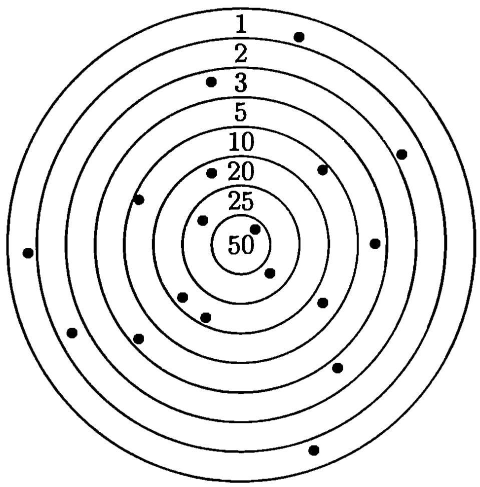
Notăm $\overline{xy} = a+b+c$. Numărul $111\cdot\overline{xy}$ va avea toate cifrele diferite doar dacă $x+y \ge 10$. Singurul număr $\overline{xy}$ cu această proprietate cuprins între 10 şi 24 este 19. Rezultă deci $\overline{fghi} = 111\cdot 19 = 2109$ şi $a+b+c = a+d+e = 19$ **3p**

Deoarece $a \le 8$ obţinem $b+c = d+e \ge 11$. Pe de altă parte, cum $b, c, d, e \in \{3,4,5,6,7,8\}$ sunt distincte, $b+c = d+e \le 13$. **1p**

Dacă $a=8$ şi $b+c = d+e = 11$ avem posibilităţile $(b=4, c=7, d=5, e=6)$, $(b=4, c=$

$7, d = 6, e = 5)$, $(b = 7, c = 4, d = 5, e = 6)$ şi respectiv $(b = 7, c = 4, d = 6, e = 5)$. **2p**
Cazul $a = 7$ şi $b + c = d + e = 12$ nu convine deoarece suma 12 se poate obţine doar ca $4 + 8$ sau $5 + 7$. **0.5p**
Cazul $a = 6$ şi $b + c = d + e = 13$ nu convine deoarece suma 13 se poate obţine doar ca $5 + 8$ sau $6 + 7$. **0.5p**

4. *Alin, Bogdan şi Cosmin participă la o competiţie de tras cu arcul. Fiecare lansează 6 săgeţi, şi fiecare săgeată nimereşte ţinta, ca în figura de mai jos. Prima tragere a lui Bogdan valorează 3 puncte, iar Cosmin adună 22 puncte cu primele câteva săgeţi. În final, cei trei constată că au toţi acelaşi număr de puncte. Cine a reuşit tragerea de 50 de puncte?*



Soluţie şi barem:

Start **1p**
Numărul total de puncte obţinute în joc este 213, deci fiecare are 71 puncte. **1p**
Având deja 22 puncte în primele k încercări, Cosmin nu poate fi cel care reuşeşte tragerea de 50 puncte. El va obţine 49 puncte din ultimele $6 - k$ trageri. Observăm că 49 nu se poate obţine ca sumă a mai puţin de 4 punctaje de pe ţintă; prin urmare, Cosmin adună 22 puncte cu primele două săgeţi şi 49 cu celelalte patru, rezultatele sale fiind $\{25, 20, 20, 3, 2, 1\}$. ... **3p**
Participantul care reuşeşte tragerea de 50 puncte nu va avea nicio săgeată în regiunile de 25 şi 20 puncte. De asemenea, nu poate avea două sau mai multe trageri de 10 puncte. Dacă nu ar avea nicio tragere de 10 puncte, ar mai putea acumula cel mult $2 \cdot 5 + 3 + 2 + 1 = 16$ puncte, care ar fi insuficiente. **2p**
Concluzionăm că punctejele obţinute de cei doi concurenţi sunt $\{50, 10, 5, 3, 2, 1\}$ şi $\{25, 20, 10, 10, 5, 1\}$. Aşadar Bogdan este cel care reuşeşte tragerea de 50 puncte. **3p**

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a VI-a

1. *Fie mulţimea de numere naturale* $\mathcal{TL}_{32} = \{n \in \mathbb{N} | 243 \leq n \leq 2403 - 2018\}$.
a) Determinaţi numărul numerelor naturale prime din mulţimea $\mathcal{TL}_{32}$.
b) Arătaţi că oricum s-ar alege 32 de numere din mulţimea $\mathcal{TL}_{32}$*, există două dintre ele care au un divizor comun prim. Dacă însă se aleg mai puţine numere, atunci este posibil ca oricare două dintre ele să fie relativ prime.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Numerele prime cuprinse între 243 şi $2403 - 2018 = 385$ sunt acele numere care nu se divid cu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sau 19 .... **2p**

Acestea sunt 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, în număr de 23 .... **1p**

b) Orice număr al mulţimii $\mathcal{TL}_{32}$ are un divizor prim între primele 8 numere prime, sau între cele 23 de numere prime din mulţime. Aplicând principiul cutiei, printre oricare 32 de numere din $\mathcal{TL}_{32}$ vor exista atunci două care au un divizor prim în comun. **4p**

Considerăm cele 23 de numere prime din mulţime, precum şi numerele $2^8 = 256$, $3^5 = 243$, $5 \cdot 53 = 259$, $7^3 = 343$, $11 \cdot 29 = 319$, $13 \cdot 23 = 299$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$. Acestea sunt din mulţimea $\mathcal{TL}_{32}$, în număr de 31 şi sunt oricare două relativ prime. **2p**

2. *a) Calculaţi*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^{10}}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \ldots - \frac{1}{3 \cdot 2^9}$$
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \ldots - \frac{1}{5 \cdot 2^8}$$

b) Arătaţi că:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \ldots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}.$$

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Deoarece $2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 4 + 2 + 1 = 2^n - 1$, avem că

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 4 + 2 + 1}{2^n} = 1 - \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

astfel că $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}$,
$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \ldots - \frac{1}{3 \cdot 2^9} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^9}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^9}$,
$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \ldots - \frac{1}{5 \cdot 2^8} = \frac{1}{5 \cdot 2^8}$ **3p**

b) Orice număr natural nenul are o unică scriere sub forma $2^k \cdot (2m+1)$, cu $k, m \in \mathbb{N}$. În suma din membrul stâng grupăm termenii după factorul impar $2m + 1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} =$$

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2^{10}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\ldots-\frac{1}{3\cdot 2^{9}}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}-\ldots-\frac{1}{5\cdot 2^{8}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\ldots-\frac{1}{7\cdot 2^{8}}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{18}-\ldots-\frac{1}{9\cdot 2^{7}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{30}-\ldots-\frac{1}{15\cdot 2^{7}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{505}-\frac{1}{1010}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1009}-\frac{1}{2018}\right)+\frac{1}{1011}+\frac{1}{1013}+\ldots+\frac{1}{2017}=$$

....**4p**

$$\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3\cdot 2^{9}}+\frac{1}{5\cdot 2^{8}}+\frac{1}{7\cdot 2^{8}}+\frac{1}{9\cdot 2^{7}}+\ldots+\frac{1}{15\cdot 2^{7}}+\ldots+\frac{1}{505\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1009\cdot 2}+$$
$$+\frac{1}{1011}+\frac{1}{1013}+\ldots+\frac{1}{2017}=\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+\ldots+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}.$$

....**2p**

3. *Fie X, Y, Z trei puncte coliniare cu $XY = YZ = 2a$, iar U, V, W trei puncte de aceeaşi parte a dreptei XY, astfel încât triunghiurile XYV şi YZW sunt echilaterale, iar U este punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{XYV}$ şi $\widehat{XWV}$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{XZU}$ şi distanţa de la punctul U la dreapta XY.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Deoarece $m(\widehat{VYW}) = 180° - m(\widehat{XYV}) - m(\widehat{WYZ}) = 180° - 60° - 60° = 60°$, obţinem că $m(\widehat{UYW}) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{XYV}) + m(\widehat{VYW}) = 30° + 60° = 90°$ (1) **1p**

Cum $VY = 2a = WY$ şi $m(\widehat{VYW}) = 60°$, triunghiul VYW este echilateral. **1p**

Deoarece $XY = XV$ şi $WY = WV$, mediatoarea segmentului $[VY]$ este dreapta XW...... **1p**

Aceasta este însă şi bisectoarea unghiului $\widehat{VWY}$ şi rezultă că $m(\widehat{XWV}) = m(\widehat{XWY}) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{YWV}) = 30°$. **1p**

Atunci $m(\widehat{UWY}) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{VWX}) + m(\widehat{XWY}) = 15° + 30° = 45°$ (2) **1p**

Din (1) şi (2) rezultă că triunghiul UYW este dreptunghic isoscel, cu $UY = YW = 2a$..... **1p**

Obţinem că $UY = YZ = 2a$, deci triunghiul UYZ este isoscel şi $m(XZU) = m(YZU) = m(YUZ) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{XYU}) = 15°$.. **1p**

Dacă T este piciorul perpendicularei din U pe XY, triunghiul UTY este un triunghi $30° - 60° - 90°$, ... **1p**

astfel că $UT = \frac{1}{2}\cdot UY = a$ **1p**

(<u>**Observaţie:**</u> Triunghiul XUZ este dreptunghic în U, şi are un unghi de 15°. Înălţimea sa UT este $\frac{1}{4}$ din lungimea ipotenuzei XZ.)

4. *Fie ABC un triunghi, D un punct pe prelungirea laturii AB, cu $A \in (BD)$ şi $AD = AC$, iar M un punct de pe bisectoarea unghiului $\widehat{CAD}$. De asemenea, considerăm dreapta $\delta = AM$ şi mulţimea $\mathcal{E} = \{P | PB + PC = AB + AC\}$. Arătaţi că:*
a) $MB + MC > AB + AC$.
b) Mulţimea $\mathcal{E}$ este conţinută în acelaşi semiplan determinat de dreapta δ care conţine şi punctele B şi C.

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Triunghiurile MAC şi MAD au latura $[MA]$ în comun, $[AC] \equiv [AD]$ şi $\widehat{MAC} \equiv \widehat{MAD}$, prin urmare sunt congruente. **1p**
Din inegalitatea triunghiului avem atunci
$MB + MC = MB + MD > BD = AB + AD = AB + AC$. **3p**
b) Dacă $P \in \delta \setminus \{A\}$, atunci conform a) are loc inegalitatea $PB + PC > AB + AC$,
deci $P \notin \mathcal{E}$. **1p**
Fie N un punct în plan, separat de punctele B şi C de dreapta δ şi fie $P \in [BN] \cap \delta$. Atunci
$NB + NC = NP + PB + NC > PB + PC \geq AB + AC$. **1p**
Rezultă că $N \notin \mathcal{E}$. **1p**
Prin urmare, $\mathcal{E}$ nu conţine puncte de pe dreapta δ, altele decât A, şi nici puncte din semiplanul opus în raport cu dreapta δ celui în care se găsesc B şi C. **2p**

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a VII-a

1. *Fie a un număr pozitiv şi fie $A = \sqrt{a + \sqrt{a}}$.*
a) Demonstraţi că dacă a este întreg, atunci A este iraţional.
b) Daţi un exemplu de număr raţional a pentru care A este raţional.
c) Demonstraţi că există o infinitate de valori raţionale ale lui a pentru care A este raţional.

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Dacă $A \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} = A^2 - a \in \mathbb{Q}$, astfel că există $n \in \mathbb{N}^*$, cu $a = n^2$. **1p**

Dar atunci $a + \sqrt{a} = n^2 + n = n(n+1)$ nu este pătrat perfect, fiind strict cuprins între n^2 şi $(n+1)^2$. Prin umare, $A \notin \mathbb{Q}$. **2p**

b) Pentru $a = \frac{1}{9}$ avem că $A = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$. **2p**

c) Pentru $a = \frac{n^4}{(2n+1)^2}$ avem $A = \sqrt{\frac{n^4}{(2n+1)^2} + \frac{n^2}{2n+1}} = \frac{n}{2n+1} \cdot \sqrt{n^2 + 2n + 1} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \in \mathbb{Q}$. **2p**

Cum $\frac{n}{2} < A < \frac{n+1}{2}$, nu pot exista două valori distincte ale lui n, pentru care valorile corespunzătoare ale numerelor A să coincidă. **1p**

Rezultă că toate valorile numerelor $a = \frac{n^4}{(2n+1)^2}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ sunt distincte, deci sunt o infinitate de astfel de valori. **1p**

2. *Pentru orice număr natural n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale în baza 10. Spunem că un număr este frumos dacă $S(n^2) = S(n)$. Determinaţi toate valorile posibile ale sumei cifrelor unui număr frumos.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Pentru orice număr natural n, diferenţa $n - S(n)$ este un multiplu de 9, ... **1p**

astfel dacă n este un număr frumos, atunci $n(n-1) = n^2 - n = (n^2 - S(n^2)) - (n - S(n)) + S(n^2) - S(n)$ este un multiplu de 9. .... **2p**

Cum $(n, n-1) = 1$, rezultă că $n = 9m$ sau $n = 9m + 1$, cu $m \in \mathbb{N}$, astfel că $S(n) = 9k$ sau $S(n) = 9k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$. **2p**

Arătăm că orice număr de forma $9k$ sau $9k + 1$ este suma cifrelor unui număr frumos.

Numărul $n = 10^k - 1 = 999\ldots9$ are $n^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = 999\ldots9800\ldots01$ şi $S(n) = S(n^2) = 9k$, deci n este frumos cu suma cifrelor $9k$. **2p**

Numărul $n = 2 \cdot 10^k - 1 = 1999\ldots99$ are $n^2 = 4 \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 10^k + 3999\ldots996000\ldots01$ şi $S(n) = S(n^2) = 9k + 1$, deci n este frumos cu suma cifrelor $9k + 1$. **2p**

3. *Fie U, V şi W trei puncte necoliniare, iar $O \in [UV]$ astfel încât $OU = u$ şi $OV = v$, cu $0 < u < v$. Intersecţiile bisectoarelor unghiurilor $\widehat{UOW}$, respectiv $\widehat{VOW}$ cu (UW), respectiv (VW), sunt punctele P, respectiv Q. Punctul R este intersecţia dreptelor PQ şi UV. Determinaţi lungimea segmentului $[OR]$.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Cu teorema bisectoarei aplicată în triunghiurile OUW şi OVW au loc

$$\frac{UP}{PW} = \frac{OU}{OW}, \quad \frac{UQ}{QW} = \frac{OV}{OW}$$

. . . . **2p**
Deoarece $OU < OV$, rezultă că

$$\frac{UP}{PW} < \frac{UQ}{QW},$$

astfel că $PQ \nparallel UV$. **1p**
Deoarece $P \in (UW)$ şi $Q \in (VW)$, punctul $R \in PQ \cap UV$ nu aparţine segmentului $[UV]$. . **1p**
Cu teorema lui Menelaos, avem

$$\frac{UR}{RV} \cdot \frac{VQ}{QW} \cdot \frac{WP}{PU} = 1,$$

, ... **1p**
de unde

$$\frac{UR}{RV} = \frac{PU}{PW} \cdot \frac{QW}{QV} = \frac{OU}{OW} \cdot \frac{OW}{OV} = \frac{OU}{OV} = \frac{u}{v} < 1.$$

. . . . **1p**
Rezultă că $UR < RV$, astfel că $U \in (RV)$. Atunci

$$\frac{OR - OU}{OR + OV} = \frac{UR}{RV} = \frac{u}{v}.$$

. . . . **1p**
Obţinem $v(OR - u) = u(OR + v)$, de unde

$$OR = \frac{2uv}{v - u}.$$

. . . . **2p**

4. *Fie M punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului $ABCD$, cu $AD \parallel BC$, şi $P \in [BC]$, astfel încât $\widehat{APM} \equiv \widehat{DPM}$. Arătaţi că distanţa de la C la AP este egală cu distanţa de la B la DP.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
Din teorema lui Thales rezultă că

$$\frac{AM}{AC} = \frac{DM}{DB} \qquad (1)$$

. . . . **1p**
Fie X şi U picioarele perpendicularelor din M, respectiv C, pe AP. Rezultă că $MX \parallel CU$, **1p**
astfel că, cu teorema fundamentală a asemănării, triunghiurile AMX şi ACU sunt asemenea.
. . . . **1p**
Obţinem atunci

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MX}{CU} \qquad (2)$$

. . . . **1p**
Analog, dacă Y şi V sunt picioarele perpendicularelor din M, respectiv B, pe DP, atunci

$$\frac{DM}{DB} = \frac{MY}{BV} \qquad (3)$$

. . . . **2p**

Din (1), (2) şi (3) obţinem atunci

$$\frac{MX}{CU} = \frac{MY}{BV} \qquad (4)$$

. . . . **1p**

Punctul M fiind pe bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$, avem că $MX = MY$ (5). **1p**

Din (4) şi (5) obţinem atunci egalitatea $CU = BV$ $\mathcal{QED}$ **1p**

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a VIII-a

1. *a) Rezolvaţi ecuaţia* $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] = 2$.

b) Determinaţi numerele naturale nenule n *pentru care ecuaţia* $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] = \frac{n}{n+1}$ *are 2018 soluţii pozitive.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

a) Fie x o soluţie a ecuaţiei date. Avem $[x] \leq x$ (cu egalitate dacă x este întreg) şi $\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$ (cu egalitate dacă $\frac{1}{x}$ este întreg). Dacă $x > 0$, atunci rezultă că $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1$ şi $\frac{1}{x} \cdot [x] \leq \frac{1}{x} \cdot x = 1$, iar prin adunare $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] \leq 2$. Egalitate avem numai atunci când x şi $\frac{1}{x}$ sunt simultan numere întregi pozitive, adică pentru $x = 1$.

Dacă $x < 0$, atunci rezultă că $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \geq x \cdot \frac{1}{x} = 1$ şi $\frac{1}{x} \cdot [x] \geq \frac{1}{x} \cdot x = 1$, iar prin adunare $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] \geq 2$. Egalitate avem numai atunci când x şi $\frac{1}{x}$ sunt simultan numere întregi negative, adică pentru $x = -1$.

Prin urmare singurele soluţii ale ecuaţiei sunt $x = -1$ şi $x = 1$. **4p**

b) Să observăm că $x = 1$ nu este soluţie (pentru niciun n) şi că x este soluţie dacă şi numai dacă $\frac{1}{x}$ este soluţie. Deoarece $x > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$, trebuie să găsim valorile lui n pentru care ecuaţia are 1009 soluţii supraunitare. Fie $x > 1$ o soluţie. Atunci $0 < \frac{1}{x} < 1$, deci $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$. Ecuaţia revine la $\frac{[x]}{[x] + \{x\}} = \frac{n}{n+1}$, apoi la $\{x\} = \frac{1}{n} \cdot [x]$. Notând $k = [x]$, condiţia $0 \leq \{x\} < 1$ implică $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, deci ecuaţia are soluţiile supraunitare $k + \frac{k}{n}$, cu $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Aşadar trebuie ca $n - 1 = 1009$, adică $n = 1010$. **5p**

Remarcă: Punctul a) poate fi rezolvat şi tratând cazuri.

2. *Fie* $VABCD$ *o piramidă în care baza* $ABCD$ *este dreptunghi. Dacă* A' *şi* B' *sunt proiecţiile lui* A *şi* B *pe* VC*, respectiv* VD*, arătaţi că punctele* A'*,* B'*,* C *şi* D *sunt conciclice.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Fie O centrul bazei. Atunci $OA' = OB = \frac{BD}{2}$ şi $OB' = OC = \frac{AC}{2}$ (mediane în triunghiuri dreptunghice). Cum $AC = BD$, rezultă că $OA' = OB' = OC = OD$. **4p**

Dacă O' este proiecţia lui O pe planul (VCD), triunghiurile $OO'A'$, $OO'B'$, $OO'C$ şi $OO'D$ sunt congruente (IC), deci punctele A', B', C şi D sunt pe un cerc cu centrul în O'. **5p**

3. *a) Aflaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care $2x^3 - 3x^2 + 1 \le 0$.*
b) Arătaţi că dacă x, y, z sunt numere reale nenegative care verifică $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$, atunci $xy + yz + zx \le x^3 + y^3 + z^3$.
c) Arătaţi că dacă x, y, z sunt numere reale nenegative care verifică $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$, atunci $x^3 + y^3 + z^3 \le x^4 + y^4 + z^4$.

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Avem $2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1) - (x-1)(x+1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 2x + x - 1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)[2x(x-1) + (x-1)] \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) \le 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \bigcup \{1\}$. **3p**
b) Conform a) avem $x^3 \ge \dfrac{3x^2 - 1}{2}$ pentru orice $x \ge 0$ şi analoagele, relaţii care adunate dau $x^3 + y^3 + z^3 \ge \dfrac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3}{2} \ge \dfrac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = x^2 + y^2 + z^2$. Ori se ştie că $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, deci concluzia se impune. **2p**
c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \ge 0$. Într-adevăr, ea revine la $(x-1)^2(2x^2 + 2x + 1) \ge 0$. Scriind şi relaţiile analoage şi adunând obţinem că $2(x^4 + y^4 + z^4) \ge 2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2 - 3) \ge 2(x^3 + y^3 + z^3)$. **4p**

Altă soluţie la b):

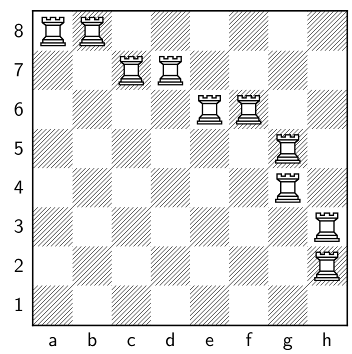
Vom arăta că $(xy + yz + zx)^2 \le (xy + yz + zx)^2 \cdot \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \le (x^3 + y^3 + z^3)^2$, ceea ce revine la $3\sum x^6 + 6\sum x^3y^3 \ge \sum x^4y^2 + 2\sum x^4yz + 2\sum x^3y^2z + 3x^2y^2z^2$.
Scriem inegalităţile $x^6 + x^3y^3 + x^3y^3 \ge 3x^4y^2$, $2(x^6 + x^3y^3 + x^3z^3) \ge 6x^4yz$, $2(x^6 + x^3y^3 + y^3z^3) \ge 6x^3y^2z$ şi analoagele lor, precum şi $\sum x^6 + 2\sum x^3y^3 \ge 9x^2y^2z^2$, care rezultă toate din inegalitatea mediilor, obţinem prin adunare şi împărţire cu 3 tocmai inegalitatea dorită. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

4. *a) Care este numărul maxim de ture care pot fi aşezate pe o tablă de şah astfel ca nicicare două să nu se atace?*
(O tablă de şah are 8 linii şi 8 coloane; spunem că două ture se atacă dacă ele se află pe aceeaşi linie sau coloană a tablei şi între ele nu mai sunt alte ture.)
b) Câte ture se pot plasa pe o tablă de şah astfel încât orice tură să atace exact o altă tură?

Alexandru Mihalcu

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Numărul maxim este 8.
Pe de o parte, dacă am avea mai multe, din principiul cutiei ar rezulta că ar exista două ture aflate pe aceeaşi linie, deci două ture care se atacă. **2p**
Pe de altă parte, putem plasa 8 ture pe o diagonală a pătratului şi atunci nicicare două nu se atacă. **1p**
b) Numărul maxim este 10.
Observăm că avem 16 rânduri şi coloane pe tabla de şah. Vom demonstra că putem plasa maxim

10 ture pe tablă.
Considerăm o tură oarecare. Aceasta atacă exact o altă tură cu care determină o linie, rămânând o altă linie pe care se află singură. Presupunem că putem plasa x ture pe tablă, deci fiecare din cele x ture va determina o linie pe care se află singură şi una pe care se află cu incă o tură din cele x. În total $x + \frac{x}{2}$ linii. Deci $\frac{3x}{2} \leq 16 \Rightarrow x \leq \frac{32}{3} < 11$. **4p**
Dar aici avem un exemplu cu 10 ture, ceea ce ne duce soluţia la final. **2p**



Remarcă: Problema se poate aborda şi examinând numărul liniilor pe care se află două ture. Pe o linie nu pot sta mai mult de două ture. Pot fi maxim 4 linii cu două ture, în caz contrar pe o coloană vor exista două ture astfel că o tură va fi atacată atât orizontal cât şi vertical. Dacă sunt 4 linii cu câte două ture, ele ocupă 8 coloane, deci nu putem avea alte ture, ceea ce duce la un maxim de 8 ture în acest caz. Dacă avem mai puţin de 3 linii cu câte două ture, atunci avem cel mult 10 ture în total (câte două pe rândurile cu două ture, câte una sau niciuna pe celelalte). Dacă pe trei linii am câte două ture, pe cele şase coloane pe care stau aceste ture (coloane care trebuie să fie distincte) nu mai putem avea ture. Pe celelalte două coloane putem avea cel mult câte două ture, ceea ce duce la cel mult $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$ ture. **4p**
Un exemplu de aşezare a 10 ture încheie rezolvarea. **2p**